

Innehållsförteckning

• Block 1: Inför derivata	5
• Lektion 1: Funktionslära	6
• Lektion 2: Polynomfunktioner	9
• Lektion 3: Faktorisering	14
• Lektion 4: Rationella uttryck	17
• Lektion 5: Rationella ekvationer	20
• Lektion 6: Gränsvärden och funktioner	23
• Lektion 7: Matematiska gränsvärden	28
• Block 2: Derivata del 1	31
• Lektion 8: Medellutning och sekant	32
• Lektion 9: Tillämpade derivator	36
• Lektion 10: Deriveringsregler del 1	40
• Lektion 11: Deriveringsregler del 2	44
• Lektion 12: Deriveringsregler del 3	48
• Lektion 13: Tangenter del 1	51
• Lektion 14: Tangenter del 2	54
• Lektion 15: Tangenter del 3	58
• Lektion 16: Derivatans definition	61
• Block 3: Derivata del 2	65
• Lektion 17: Teckentabell	66
• Lektion 18: Skissa grafer	69
• Lektion 19: Största och minsta värde	73
• Lektion 20: Tillämpningar med största och minsta värde	78
• Lektion 21: Andraderivatans och extremvärdesproblem	83
• Lektion 22: Samband mellan originalfunktionens och derivatans graf	87
• Lektion 23: Deriveringsregler för exponentialfunktioner del 1	91
• Lektion 24: Talet e och den naturliga logaritmen	94
• Lektion 25: Deriveringsregler för exponentialfunktioner del 2	97
• Lektion 26: Tillämpade exponentialfunktioner med derivata	100
• Block 4: Primitiva funktioner och integraler	104
• Lektion 27: Primitiva funktioner	105
• Lektion 28: Primitiva funktioner med villkor	108
• Lektion 29: Integralnotation	112
• Lektion 30: Integraler och primitiva funktioner	116
• Lektion 31: Tillämpade integraler	120
• Lektion 32: Kalkylprogram och areor	124
• Lektion 33: Matematikens kulturhistoria: Derivata och integraler	127
• Block 5: Talföljder och linjär optimering (Endast B-spåret)	129
• Lektion 34: Geometrisk talföljd	130
• Lektion 35: Geometrisk summa	133
• Lektion 36: Att spara pengar	137
• Lektion 37: Linjära optimering del 1	141
• Lektion 38: Linjära optimering del 2	144

•	BLOCK 6: Trigonometri (Endast C-spåret)	148
•	Lektion 39: Enhetscirkeln	149
•	Lektion 40: Härledning av trigonometriska samband	154
•	Lektion 41: Trigonometriska ekvationer	158
•	Lektion 42: Tangens och standardvinklar.....	161
•	Lektion 43: Triangelsatserna	165
•	Lektion 44: Absolutbelopp.....	170
•	Facit	174
•	Formelsamling	199

BLOCK 1

Inför derivata

Innehåll:

Funktionslära

Polynomfunktioner

Faktorisering

Rationella uttryck

Rationella ekvationer

Gränsvärden och funktioner

Matematiska gränsvärden

Lektion 1: Funktionslära

I denna lektion ska vi repetera funktionsläran som hanterar notationen $f(x)$. Vi kommer även att fokusera på vissa typer av uppgifter som är relevanta för framtida uppgifter och ur man kan hantera dessa. Vi går över till våra exempel direkt.

Exempel 1) Beräkna funktionen $f(x)=6-2x$.

- a) Beräkna $f(-3)$
- b) Lös ekvationen $f(x)=-4$
- c) Beräkna $\frac{f(4)}{f(-1)}$
- d) Bestäm $f(x+h)$

Lösning:

a) Vi sätter in $x=-3$ i $f(x)=6-2x$.

$$f(-3)=6-2 \cdot (-3)=12$$

$$\text{Svar: } f(-3)=12$$

b) Med $f(x)=-4$ innebär att $y=-4$ och söker x . Vi skapar ekvationen

$$6-2x=-4$$

$$-2x=-10$$

$$x=5$$

$$\text{Svar: } x=5$$

Exempel 2) Beräkna $g(x)=x^2-1$, och bestäm

- a) $g(2)+g(-2)$
- b) $g(-3) \cdot g(4)$
- c) $g(x+h)$
- d) $g(x)=24$

Lösning:

a) Vi beräknar termerna separat.

$$g(2)=2^2-1=3$$

$$g(-2)=(-2)^2-1=3$$

$$g(2)+g(-2)=3+3=6$$

$$\text{Svar: } g(2)+g(-2)=6$$

c) Denna kan vi lösa på två sätt. Först löser vi allt på en och samma rad. I täljaren sätter vi in $x=4$ och i nämnaren sätter vi in $x=-1$ i nämnaren i funktionen.

$$\frac{f(4)}{f(-1)} = \frac{6-2 \cdot 4}{6-2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

Ett problem med sätt är att det kan bli kladdigt. Därför kan det rekommenderas att hantera nämnaren och täljaren separat.

$$f(4)=6-2 \cdot 4=-2$$

$$f(-1)=6-2 \cdot (-1)=8$$

Dividera $f(4)$ med $f(-1)$ och vi får

$$\frac{f(4)}{f(-1)} = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Svar: } \frac{f(4)}{f(-1)} = -\frac{1}{4}$$

d) Det som menas med $f(x+h)$ innebär är x ska ersättas med $x+h$.

$$f(x+h)=6-2 \cdot (x+h)=6-2x-2h$$

$$\text{Svar: } f(x+h)=6-2x-2h$$

b) Vi beräknar faktorerna separat.

$$g(-3)=(-3)^2-1=8$$

$$g(4)=4^2-1=15$$

$$g(-3) \cdot g(4)=8 \cdot 15=120$$

$$\text{Svar: } g(-3) \cdot g(4)=120$$

c)

$$g(x+h)=(x+h)^2-1=x^2+2xh+h^2-1$$

$$\text{Svar: } g(x+h)=x^2+2xh+h^2-1$$

d)

$$x^2-1=24$$

$$x^2=25$$

$$x=\pm 5$$

Ta kvadratroten ur båda sidorna.

$$\text{Svar: } x_1=-5 \text{ och } x_2=5.$$

Uppgifterna som handlar om $f(x+h)$ är typer av uppgifter som kommer att hanteras mer och mer. Det är viktigt att fundera på vad som händer då vi byter ut x mot $x+h$ och inte bara adderar funktionen med ett h . Nedan visar vi vad som är rätt och vad som är fel för funktionen $f(x)=x^2-2x$ och vi söker $f(x+h)$.

1) Rätt: $f(x+h)=(x+h)^2-2(x+h)=x^2+2xh+h^2-2x-2h$

2) Fel: $f(x+h)=x^2-2x+h$

I första raden ser vi att vi byter ut x mot $x+h$ medan i rad 2 så adderar vi bara h i slutet vilket är inkorrekt.

Exempel 3) För funktionen $f(x)=x^2-2x$, bestäm

- a) $f(x)=0$
- b) $f(-3)-f(2)$

Lösning:

a) Vi behöver också hantera olika typer av ekvationer som kan uppstå.

$x^2-2x=0$ Här kan vi faktorisera och använda nollproduktsmetoden.

$x(x-2)=0$ Med nollproduktsmetoden får vi

$x_1=0$

$x_2=2$.

Svar: $x_1=0$ och $x_2=2$.

b)

$f(-3)=(-3)^2-2\cdot(-3)=15$

$f(2)=2^2-2\cdot 2=0$

$f(-3)-f(2)=15-0=15$

Svar: $f(-3)-f(2)=15$

Exempel 5) För funktionen $f(x)=g(x)h(x)$, där $g(x)=x^2-2$ och $h(x)=3-2x$. Bestäm $f(-4)$.

Lösning: För att få förståelse om vad som ska göras kan vi börja med att sätta in $x=-4$ i $f(x)$.

$f(-4)=g(-4)h(-4)$

Vi behöver alltså beräkna $g(-4)$ och $h(-4)$.

$g(-4)=(-4)^2-2=14$

$h(-4)=3-2\cdot(-4)=11$

$f(-4)=g(-4)h(-4)=14\cdot 11=154$

Svar: $f(-4)=154$

Exempel 4) För funktionen $g(x)=x^2-1$, bestäm $\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$.

Lösning: Vi skriver upp båda termerna.

$g(x)=x^2-1$

$g(x+h)=(x+h)^2-1=x^2+2xh+h^2-1$

Vi sätter in detta i uttrycket ovan.

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{x^2+2xh+h^2-1-(x^2-1)}{h}$$

$$= \frac{x^2+2xh+h^2-1-x^2+1}{h} = \frac{2xh+h^2}{h}$$

$$= \frac{h(2x+h)}{h} = 2x+h$$

Svar: $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 2x+h$

Lektion 1: Uppgifter

Uppvärmning

U1 Lös följande uppgifter:

- Om $f(x) = x^2$, bestäm $f(2)$.
- Om $f(x) = x^2$, bestäm $f(-1)$.
- Om $f(x) = x^2 - x$, bestäm $f(2)$.
- Om $f(x) = 2 - 3x^2$, bestäm $f(2)$.
- Om $f(x) = 3x - 2$, bestäm $f(2) - f(4)$.
- Om $f(x) = \frac{x^2}{3}$, bestäm $f(2) + f(1)$.
- Om $f(x) = x + x^2$, bestäm $f(2) + f(3)$.
- Om $f(x) = -x^2 - 1$, bestäm $f(1) - f(0)$.

Grundläggande

101 Om $f(x) = 3x + 3$, bestäm

- $f(x+h)$
- $\frac{f(3)}{f(-2)}$
- $f(x) = 0$

102 Om $f(x) = 2x + x^2$, bestäm

- $f(-2)$
- $\frac{f(1)}{f(2)}$
- $f(-3)$
- $f(x) = 0$

103 Om $f(x) = 1 - x^2$, bestäm

- $f(x) = 0$
- $f(3) - f(0)$
- $f(x) = -3$
- $f(-2)$

104 Bestäm $f(x+h)$ om

- $f(x) = 2x$
- $f(x) = x^2$
- $f(x) = 2x + x^2$

Avancerat

105 Om $f(x) = 4x + 3$ och $g(x) = -x^2$, bestäm

- $f(x) - g(x) = 0$
- $f(x) \cdot g(x)$

106 Bestäm $h(-2)$ om $h(x) = f(x) + g(x)$ där $f(x) = 3x^2 - 1$ och $g(x) = -x^3$.

107 Om $f(x) = -x^2 + 1$ och $g(x) = 2x$, bestäm

- $f(1) - g(-1)$
- $g(x)^2 - f(x)$

108 Bestäm $f(x) \cdot g(x) \cdot h(x)$ om $f(x) = x + 1$, $g(x) = -x - 1$ och $h(x) = 2x - 1$.

Fördjupning

109 Bestäm $f(-2)$ om $f(x) = \frac{1}{h(x) \cdot g(x)}$ där $h(x) = \frac{2}{x+1}$ och $g(x) = x^3$.

110 Bestäm $f(0)$ om $f(x) = \frac{g(x)}{g(x+1)} \cdot h(x)$ där $g(x) = 1,5^x$ och $h(x) = 2 + x$.

111 Om $h(x) = f(x)^2 - g(x)$ där $f(x) = \frac{1}{x}$ och $g(x) = x$, bestäm

- $h(x+1)$
- $h(x+a)$
- $h(2) - h(1)$

112 Bestäm $g(x)$ om $g(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ där $f(x) = x^2 + 1$ och förkorta.

113 För $f(x)$ gäller att $f(x+1) = 2x - 4$.

- Bestäm $f(2)$.
- Bestäm $f(x)$.

Lektion 2: Polynomfunktioner

Vi börjar med att lista upp de typer av funktioner vi har arbetat med hittills.

- 1) Linjär funktion: $f(x)=kx+m$
- 2) Andragradsfunktion: $f(x)=ax^2+bx+c$
- 3) Exponentialfunktion: $f(x)=Ca^x$
- 4) Potensfunktion: $f(x)=Cx^a$

Den linjära funktionen och andragradsfunktionen är två typer av funktioner som ligger under samma kategori. Dessa två kallas även för polynom eller polynomfunktioner.

För att förtydliga vad ett polynom är skriver upp några exempel och därefter en förklaring.

- a) $f(x)=5x^2-2x$
- b) $g(x)=-5x^3+5x^7$
- c) $h(x)=2x^5-2x^4-77x^3+1,3x^2-7x-12$
- d) $p(x)=(x^2-3x)(x^3+1)$
- e) $y=2$

Det som gör att dessa kan kallas för polynom är att varje term kan beskrivas av Cx^a där C är en konstant och a noll eller ett positivt heltal. Funktionen $p(x)$ i detta fall kan multipliceras till $p(x)=(x^2-3x)(x+1)=x^5-3x^4+x^2-3x$ och uppfyller villkoret.

Funktionen $y=2$ uppfyller också villkoret då man kan tänka sig att funktionen är $y=2x^0=2$, det vill säga att exponenten är noll.

En allmän beskrivning av ett polynom ges av $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_2x^2+a_1x+a_0$, där a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 är reella tal och n är noll eller ett positivt tal.

Exempel på några funktioner som inte är polynom är följande:

- f) $f(x)=-x^{-2}-2x$
- g) $f(x)=3x^{9,5}+2x^6+8$
- h) $f(x)=x^3-2x^\pi+3x^{-1}$

Oavsett om det finns en eller fler termer i som uppfyller villkoret har samtliga funktioner åtminstone en term som inte uppfyller villkoret och är därmed inte ett polynom.

När man talar om polynom är det också relevant att tala om dess grad. Samtliga polynom har en grad vilket ges av den största exponenten hos polynomet. Vi anger graden hos funktionerna a-e nedan.

- | | |
|---|--|
| a) $f(x)=5x^2-2x$ | Har grad 2 då största exponenten är 2. |
| b) $g(x)=-5x^3+5x^7$ | Har grad 7 då största exponenten är 7. |
| c) $h(x)=2x^5-2x^4-77x^3+1,3x^2-7x-12$ | Har grad 5 då största exponenten är 5. |
| d) $p(x)=(x^3-3x)(x^2+1)=x^5-3x^4+x^2-3x$ | Har grad 5, då största exponenten blir 5 när man utvecklar parenteserna. |
| e) $y=2$ | Har grad 0 då den saknar x -termer. |

Vi skapar en ny funktion som är $y=f(x)g(x)=(5x^2-2x)(-5x^3+5x^7)$, vad blir graden för denna?

Vi kan multiplicera $(5x^2-2x)(-5x^3+5x^7)$ som vanligt men vi vet att $5x^2$ och $5x^7$ kommer att multipliceras med varandra och ge termen $25x^9$ vilket är den största exponenten som vi kommer att erhålla. Därmed är detta ett polynom av grad 9.

Räkneregeln för att multiplicera polynom med varandra är följande:

$$\text{Om } p(x)=f(x)g(x) \text{ är } \text{grad}(p(x))=\text{grad}(f(x))+\text{grad}(g(x)).$$

Vi hanterar några uppgifter.

Exempel 1) Bestäm graden hos $p(x)=(x^4-1)(x+1)$.

Lösning: Vi gör detta genom att utveckla och förenkla.

$$p(x)=(x^4-1)(x+1)=x^5+x^4-x-1$$

Svar: $p(x)$ är av grad 5.

Exempel 2) Bestäm graden hos $p(x)=(x^4-1)(x+1)$.

Lösning: Vi gör detta utan att utveckla och förenkla.

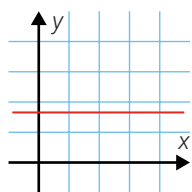
(x^4-1) har grad 4.

$(x+1)$ har grad 1.

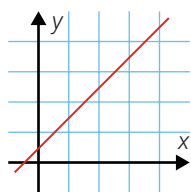
Vi adderar dessa grader enligt räkneregeln. $4+1=5$.

Svar: $p(x)$ är av grad 5.

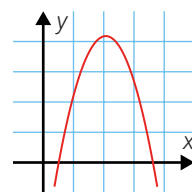
Vi har tidigare ritat flera linjära funktioner och andragradsfunktioner vilket är polynom av grad 0, grad 1 och grad 2. Ökas graden kommer grafen få ett annat utseende. Detta ska vi undersöka, nedan ser vi graferna till några polynom som vi ska hantera.



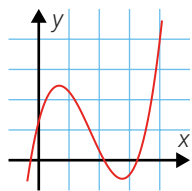
Figur 1: Grad 0



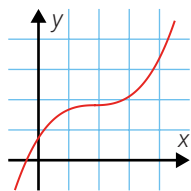
Figur 2: Grad 1



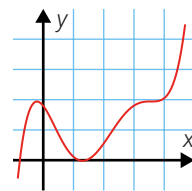
Figur 3: Har en vändpunkt, därmed grad 2.



Figur 4: Har två vändpunkter, därmed grad 3.



Figur 5: Har en terrasspunkt, därmed grad 3.



Figur 6: Har två extrempunkter och en terrasspunkt, därmed grad 5.

Nedan kommer vi att beskriva några regler för att bestämma graden hos ett polynom. Dessa gäller för alla polynom förutom polynom av grad 0, som figur 1 visar.

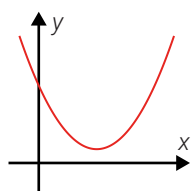
För att bestämma graden hos ett polynom vars graf är ritad ska man leta efter följande:

- 1) Alla polynom börjar med +1 i grad. OBS! Detta gäller inte polynom av grad 0.
- 2) Antalet maximi- och minimipunkter. Räknas som +1 till graden.
- 3) Antalet terrasspunkter. Räknas som +2 till graden. Tittar man på figur 3 och tänker att maximi- och minimipunkten slås ihop, så att punkterna hamnar på varandra bildas det en terrasspunkt. Därför betraktas den som +2 till graden.
- 4) Avsluta med att addera ihop punkt 1-3 för att ta reda på graden.

Observera att vi bestämmer graden utifrån vad vi ser av grafen. Vi vet däremot inte om grafen vänder ytterligare en gång till utanför figuren. Vi kan endast avgöra den minsta möjliga graden.

Av avslutar med att hantera det som kallas för algebrans fundamentalsats som beskriver att antalet rötter till en ekvation är lika många som graden hos ekvationen.

Detta innebär att polynomet $p(x)=x^2-4x+5$ har 2 nollställen. Tittar vi dock på grafen till detta polynom ser vi inga nollställen.



$$p(x)=x^2-4x+5$$

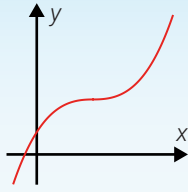
Om vi tänker oss funktionen $p(x)=x^2-4x+5$ och söker nollställen får vi ekvationen $x^2-4x+5=0$. Vi löser denna med pq-formeln.

$$x = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 5} = 2 \pm \sqrt{-1}$$

Som vi ser saknar denna reella nollställen och detta är svaret på frågan. Antalet nollställen hos ett polynom är summan av de reella och de icke-reella nollställena. Polynomet $p(x)=x^2-4x+5$ är av grad 2 och har: 0 Reella nollställen + 2 icke-reella nollställen.

Vi tittar på ett till exempel.

Exempel 3) I figuren nedan är ett polynom av grad 3 ritad.
Bestäm antalet reella och icke-reella nollställen.



Lösning:

Figuren har endast 1 nollställe. Vi listar upp detta.

Antal reella nollställen: 1

Graden hos polynomet: 3

Antalet icke-reella nollställen: $3-1=2$

Svar: 1 reellt nollställe och
2 icke-reella nollställen.

Detta kan även göras algebraiskt.

Exempel 4) Bestäm antalet reella och icke-reella nollställen till ekvationerna nedan.

a) $f(x)=(x+1)(x^2-4)$

b) $g(x)=(x-3)(x^2+9)$

c) $h(x)=(x+1)^2(x^2-4)$

d) $p(x)=(x^2-1)^3(x^2+4)^2$

Lösning: I samtliga sätter vi polynomet lika med 0 för att undersöka antalet nollställen.

a) Vi bestämmer graden för $f(x)=(x+1)(x^2-4)$.
Första parenteserna är av grad 1, andra parenteserna av grad 2. Därmed är $f(x)$ av grad $1+2=3$.

$(x+1)(x^2-4)=0$ Använd nollproduktsmetoden.

$x+1=0$ Ger $x_1=-1$.

$x^2-4=0$ Ger $x_2=-2$ och $x_3=2$.

Antal reella nollställen: 3

Antalet icke-reella nollställen: 0

$3+0=3$ vilket är också graden hos polynomet.

Svar: 3 reellt nollställe och
0 icke-reella nollställen.

b) Vi bestämmer graden för $g(x)=(x-3)(x^2+9)$.
Första parenteserna är av grad 1, andra parenteserna av grad 2. Därmed är $g(x)$ av grad $1+2=3$.

$(x-3)(x^2+9)=0$ Använd nollproduktsmetoden.

$x-3=0$ Ger $x_1=3$.

$x^2+9=0$ Två icke-reella nollställen.

Antal reella nollställen: 1

Antalet icke-reella nollställen: 2

$1+2=3$ vilket är också graden hos polynomet.

Svar: 3 reellt nollställe och
0 icke-reella nollställen.

c) Vi bestämmer graden för $h(x)=(x+1)^2(x^2-4)$.

Vi skriver om funktionen

$h(x)=(x+1)^2(x^2-4)=(x+1)(x+1)(x^2-4)$

Detta ger graden $1+1+2=4$ eller så kan man se det som $1\cdot 2+2=4$.

$(x+1)^2(x^2-4)=0$ Använd nollproduktsmetoden.

$x+1=0$ Ger $x_1=-1$. Men eftersom att det finns två av dessa räknas det som två rötter. Det vill säga att $x_2=-1$.

$x^2-4=0$ Ger $x_3=-2$ och $x_4=2$.

Antal reella nollställen: 4

Antalet icke-reella nollställen: 0

$4+0=4$ vilket är också graden hos polynomet.

Svar: 4 reellt nollställe och
0 icke-reella nollställen.

d) Vi bestämmer graden för $p(x)=(x^2-1)^3(x^2+4)^2$.
Graden är $2\cdot 3+2\cdot 2=10$.

$(x^2-1)^3(x^2+4)^2=0$ Använd nollproduktsmetoden.

$x^2-1=0$ Ger $x_{1,2}=\pm 1$. Men eftersom att vi har tre av denna parenteserna ger detta 6 rötter.

$x^2+4=0$ Två icke-reella nollställen. Men vi har två av denna parenteserna. Detta ger oss 4 icke-reella rötter.

Antal reella nollställen: 6

Antalet icke-reella nollställen: 4

$6+4=10$ vilket är också graden hos polynomet.

Svar: 6 reellt nollställe och
4 icke-reella nollställen.

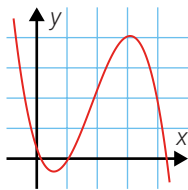
Som avslutning ska det påpekas att exempelvis har exempel 4 c) har faktorn $(x+1)^2$ som hade nollstället $x_1=-1$. Men vi räknade med den som två nollställen. Det är däremot endast **ett nollställe** men med **multiplicitet** av två. Alltså har 4 c) egentligen endast 3 reella nollställen (4 med multiplicitet) och 4 d) har 2 reella och 2 icke-reella nollställen (6 respektive 4 med multiplicitet).

Lektion 2: Uppgifter

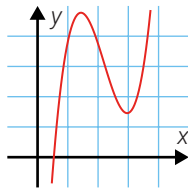
Uppvärmning

U2 Lös följande uppgifter:

- Bestäm polynomets grad: $p(x) = x^3 + x^2 + x + 5$
- Bestäm polynomets grad: $p(x) = 5x^{-4}$
- Bestäm polynomets grad: $p(x) = 3x^{12} - x^2 + 5$
- Bestäm polynomets grad: $p(x) = x$
- Bestäm polynomets grad: $p(x) = 3$
- Bestäm polynomets grad: $p(x) = x^3 \cdot x^2$
- Grafen till polynomet $p(x)$ är ritad figuren nedan. Bestäm polynomets grad.



- Grafen till polynomet $p(x)$ är ritad figuren nedan. Bestäm antalet reella och imaginära rötter för polynomet.



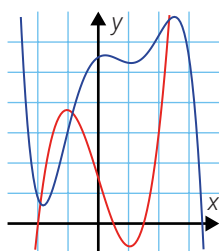
Grundläggande

201 Vilken eller vilka av funktionerna nedan är ett polynom samt avgör dess grad.

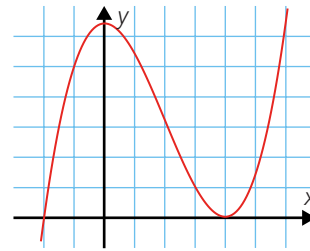
- $p(x) = x^7 - x^2 + 5 - x^{12}$
- $f(x) = x^{-2} - 3x^{-5} + 2$
- $g(x) = (x^3 - 5)(x^{11} - x^3)$
- $h(x) = p(x) + g(x)$, där $p(x)$ och $g(x)$ är från deluppgift a) och c).

202 Bestäm graden hos $f(x) \cdot g(x)$ om $f(x) = x^3 + 5$ och $g(x) = (x+3)(x^5 - 1)$.

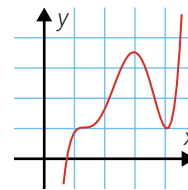
203 I figuren åt höger är tredjegradspolynomet $f(x)$ och femtegradspolynomet $g(x)$ ritade. Bestäm antalet reella och imaginära rötter för respektive polynom.



204 Torwald påstår att detta tredjegradspolynom har två reella rötter och en imaginär rot. Avgör om han har rätt eller fel.



205 Bestäm det minsta antalet möjliga grader på polynomet vars graf är ritad i figuren nedan.



Avancerat

206 Betrakta polynomet $p(x) = (x+2)^2(x^2+4)^3$.

- Bestäm graden hos $p(x)$.
- Bestäm antalet reella och imaginära rötter och kontrollera med en grafitande miniräknare.

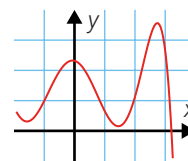
207 Om $g(x)$ är av grad 2 och $h(x)$ är av grad 3, bestäm graden hos $f(x)$ om

- $f(x) = g(x) \cdot h(x)$
- $f(x) = h(x) - g(x)$
- $f(x) = g(x) + h(x)$

208 Betrakta polynomet $p(x) = (x^3 - 2)(x^7 - x^2) + x^8$.

- Bestäm antalet grader på $p(x)$.
- Om $q(x) = -x^{10} + x^9$, bestäm graden på uttrycket $p(x) + q(x)$.

209 I figuren nedan är ett polynom av grad sex inritad. Bestäm antalet imaginära och reella rötter. OBS! Titta på grafen noggrant.

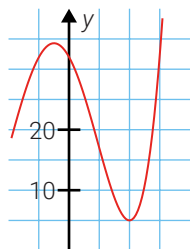


Fördjupning

210 För $p(x) = (x+a)^2(x^2+2a)^3$, bestäm antalet reella rötter om

- a) $a > 0$ b) $a < 0$

211 I figuren nedan är ett fjärdegradspolynom $p(x)$ ritad. Bestäm antalet reella rötter på $p(x)$ och redovisa samtliga fall.



212 Om $f(x) = ax^n + bx$ och $g(x) = cx^n - dx$ där n är ett positivt heltal, bestäm grad på följande

- a) $f(x) + g(x)$ där $a = -c$ och $b \neq d$.
b) $f(x) + g(x)$ där $a \neq -c$ och $b = 2d$.
c) $f(x) \cdot g(x)$
d) $f(x) \cdot g(x)^2$
e) $f(x)^n \cdot g(x)^n$

Lektion 3: Faktorisering

I denna lektion ska vi repetera faktorisering. Vi har tidigare haft fokus på två metoder och lite kort med en tredje metod. Vi skriver upp dessa och sedan formlerna under. Därefter ska vi använda nollställena till ett polynom för att skissa dess graf.

Vi ska 1) bryta ut gemensamm faktor, 2) faktorisera med hjälp av konjugat- och kvadreringsreglerna och 3) faktorisera med hjälp av ekvationens rötter, specifikt med hjälp av pq-formeln.

Vi börjar med att hantera exempel som passar in i punkt 1 och 2.

Exempel 1) Faktorisera följande funktioner.

a) $f(x)=10x^2-15x^3$

b) $g(x)=4x^2-12x$

c) $h(x)=x^2+6x+9$

d) $p(x)=3x^2-75$

Lösning:

a) Vi bryter ut största gemensamma faktor.

$$f(x)=10x^2-15x^3$$

$$f(x)=2 \cdot 5 \cdot x \cdot x - 3 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot x \quad \begin{array}{l} 5\text{:an och två } x \text{ är} \\ \text{gemensamma faktorer.} \end{array}$$

$$f(x)=5 \cdot x \cdot x \cdot (2-3 \cdot x)$$

$$f(x)=5x^2(2-3x)$$

$$\text{Svar: } f(x)=5x^2(2-3x)$$

b) Samma gäller för denna, men denna gång "ser vi" vad som är gemensam faktor.

$$g(x)=4x^2-12x \quad \begin{array}{l} \text{Båda termerna kan divideras med} \\ \text{en 4 och ett } x. \text{ Detta kan vi bryta ut.} \end{array}$$

$$g(x)=4x(x-3)$$

$$\text{Svar: } g(x)=4x(x-3)$$

c) I denna uppgift ska vi använda första kvadreringsregeln.

$$h(x)=x^2+6x+9 \quad \begin{array}{l} \text{Samtliga termer är positiva och} \\ \text{skriver vi om sista termen till } 3^2 \text{ ser} \\ \text{vi att denna passar in i första} \\ \text{kvadreringsregeln.} \end{array}$$

$$h(x)=x^2+6x+3^2 \quad \begin{array}{l} \text{Utifrån regeln är } a=x \text{ och } b=3. \\ \text{Sätt in detta i } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2. \end{array}$$

$$h(x)=(x+3)^2 \quad \text{Vi kontrollerar att detta stämmer.}$$

$$h(x)=(x+3)^2$$

$$h(x)=x^2+2x3+3^2$$

$$h(x)=x^2+6x+9 \quad \text{Stämmer!}$$

$$\text{Svar: } h(x)=(x+3)^2$$

d) I denna ska vi använda konjugatregeln. Men man ska alltid börja med att se om det går att bryta ut en gemensam faktor.

$$p(x)=3x^2-75 \quad \text{Vi bryter ut 5 från båda termerna.}$$

$$p(x)=3(x^2-25) \quad \text{I parentesen passar konjugatregeln.}$$

$$p(x)=3(x^2-5^2) \quad \begin{array}{l} \text{Utifrån regeln är } a=x \text{ och } b=5. \\ \text{Sätt in detta i } (a+b)(a-b)=a^2-b^2. \end{array}$$

$$p(x)=3(x+5)(x-5)$$

$$\text{Svar: } p(x)=3(x+5)(x-5)$$

Vi fortsätter med att undersöka nollställena hos ett polynom som är faktorerad. Därefter ska vi koppla detta till hur nollställena har med faktorisering att göra.

Exempel 2) Bestäm nollställena till funktionens

$$p(x)=2(x-3)(x+2).$$

Lösning: Vi söker $p(x)=0$.

$$2(x-3)(x+2)=0 \quad \text{Vi använder nollproduktmetoden.}$$

$$(x-3)=0 \quad \text{Ger } x_1=3.$$

$$(x+2)=0 \quad \text{Ger } x_2=-2.$$

$$\text{Svar: } x_1=3 \text{ och } x_2=-2.$$

I exempel 2 ser vi att parenteserna är direkt kopplade med funktionens nollställen. Detta kan vi använda oss av. Om en funktions nollställen går att avgöra "enkelt" då funktionen är faktorerad kan man tänka sig att man kan göra detta baklänges. Det vill säga om vi känner till en funktions nollställen kan vi avgöra hur den ska faktoriseras. Lägg även märke till att nollstället är motsatt till vad som står i parentesen.

$$1) (x-3)=0 \text{ är } 3\text{:an negativ och ger } x_1=3.$$

$$2) (x+2)=0 \text{ är } 2\text{:an positiv och ger } x_2=-2.$$

Regeln är $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\dots$ där a, b, c, \dots är funktionens nollställen.

Exempel 3) Faktorisera följande funktioner.

a) $f(x)=x^2-10x+9$
b) $g(x)=x^3+8x^2+12x$

Lösning:

a) I denna ser det ut som att andra kvadreringsregeln fungerar men mellersta termen borde vara isåfall $-6x$. Vi använder pq-formeln för att hitta nollställena. Sätt $f(x)=0$.

$$x^2-10x+9=0 \quad p=-10 \text{ och } q=9.$$

$$x = -\frac{-10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2 - 9}$$

$$= 5 \pm \sqrt{25-9}$$

$$= 5 \pm 4$$

Detta ger $x_1=9$ och $x_2=1$. Om vi tänker på faktoriseringen utifrån exempel 2 ska parenteserna vara motsatts, det vill säga att ena ska vara $(x-9)$ och andra $(x-1)$.

$$f(x)=x^2-10x+9=(x-9)(x-1)$$

$$\text{Svar: } f(x)=(x-9)(x-1)$$

c) Vi börjar med att bryta ut gemensamma faktorer för att avgöra sedan vad som behöver göras.

$$g(x)=x^3+8x^2+12x \quad \text{Bryt ut } x \text{ från samtliga termer.}$$

$$g(x)=x(x^2+8x+12) \quad \text{Vi använder pq-formeln nollproduktsmetoden.}$$

$$x=0 \quad \text{Ger } x_1=0.$$

$$x^2+8x+12=0 \quad \text{Använd pq-formeln. } p=8 \text{ och } q=12.$$

$$x = -\frac{8}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{2}\right)^2 - 12}$$

$$= -4 \pm \sqrt{16-12}$$

$$= -4 \pm 2$$

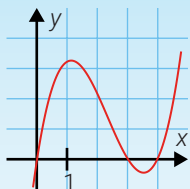
Detta ger $x_2=-2$ och $x_3=-6$. Vi har även $x_1=0$. Vi faktorerar funktionen.

$$g(x)=(x-0)(x+2)(x+6)=x(x+2)(x+6)$$

$$\text{Svar: } g(x)=x(x+2)(x+6)$$

Vi avslutar med att hantera funktionen och dess graf med hjälp av dess nollställen.

Exempel 4) Ange ett polynom av grad 3 som beskriver grafen.



Lösning: Vi börjar med att ange polynomets nollställen.

$x_1=0$, $x_2=3$ och $x_3=4$. Detta ger oss att polynomets i faktorerad form blir.

$$p(x)=x(x-3)(x-4)$$

$$\text{Svar: } p(x)=x(x-3)(x-4)$$

Exempel 5) Skissa grafen till funktionen $h(x)=(x-3)^2(x+1)$.

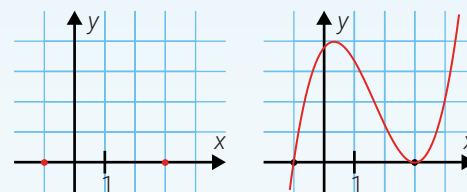
Lösning: Vi börjar med att avgöra funktionens nollställen. Sätt $h(x)=0$.

$$(x-3)^2(x+1)=0$$

$$(x-3)^2=0 \quad \text{Ger } x_{1,2}=3. \text{ Detta är en dubbelrot.}$$

$$(x+1)=0 \quad \text{Ger } x_3=-1.$$

Vi markerar ut nollställena och ritar sedan grafen.



Lägg märke till att i exempel 5 har polynomets faktor $(x-3)^2$. Denna faktor ger en dubbelrot vilket syns i grafen genom att grafen träffar x-axeln och vänder.

Motsatsen gäller också, ser vi att grafen visar en dubbelrot kan vi avgöra att en faktor bör vara $(x-a)^2$.

Vi skriver ner relevanta regler som kan användas i uppgifterna åt höger.

$$\text{Första kvadreringsregeln: } (a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

$$\text{Andra kvadreringsregeln: } (a-b)^2=a^2-2ab+b^2.$$

$$\text{Konjugatregeln: } (a+b)(a-b)=a^2-b^2.$$

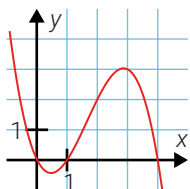
$$\text{Om } x^2+px+q=0 \text{ gäller att } x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Lektion 3: Uppgifter

Uppvärmning

U3 Lös följande uppgifter:

- Bestäm nollstället till funktionen $f(x) = 2x - 6$.
- Bestäm nollställena till funktionen $f(x) = 2(x+1)(x-2)$.
- Bestäm nollställena till funktionen $f(x) = (x-4)(x+2)$.
- Bestäm nollställena till funktionen $f(x) = x^2 - 2x - 8$.
- Skriv funktionen i föregående uppgift på faktorerad form.
- Skriv funktionen $f(x) = x^2 + 4x + 3$ på faktorerad form.
- Rita grafen till föregående uppgift.
- I figuren nedan är en tredjegradsfunktion ritad. Ange funktionens nollställen.



Grundläggande

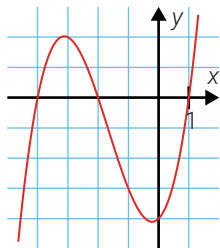
301 Skriv följande funktioner på faktorerad form:

- $f(x) = x^2 + 6x + 5$
- $g(x) = 2x^2 - 8$
- $h(x) = 5x^3 - 25x^2$

302 Bestäm följande funktioners nollställen och rita därefter grafen:

- $f(x) = x^3 - x$
- $g(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$

303 I figuren nedan är en tredjegradsfunktion ritad. Ange en funktion som beskriver grafen nedan.



Avancerat

304 Skriv om funktionen nedan på faktorerad form.

$$f(x) = (x+2)x - 6(x+1) + 1$$

305 Bestäm a så att man kan bryta ut x^2 ur uttrycket

$$x^4 - x^3 + x^2 + x + a$$

306 Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = (x^2 - 4)(x^2 + 2x + 1)$$

307 Rita ett exempel på grafen till funktionen

$$f(x) = (x-a)^2(x-2)$$
 om

- $a < 0$
- $a > 2$
- $0 < a < 2$

Fördjupning

308 Bestäm samtliga reella nollställen till funktionen

$$f(x) = x^3 - \frac{4}{x}, \text{ genom att bryta ut } \frac{1}{x}.$$

309 Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = (x^2 - 4)(x + 3) - 2(x^2 - 4)$$

310 Rita alla möjliga grafer till funktionen

$$f(x) = (x-a)(x-2a)(x-3a) \text{ där } a \text{ är ett reellt tal.}$$

311 Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 + 6x + 3a)(x^2 + 2ax + 1)$.

- Faktorisera $f(x)$ då $a = 0$.
- För vilka a får funktionen fyra reella lösningar?

312 Rita alla möjliga grafer till funktionen $y = (x-a)(x-b)^2$ där $a, b > 0$.

Lektion 4: Rationella uttryck

Vi har fram till nu hanterat begreppet polynom. Vi har övat på att identifiera ett polynom, bestämma dess grad, faktorisera den samt rita dess graf. I detta avsnitt ska vi hantera polynom i bråk, det som kallas för ett rationellt uttryck.

Ett rationellt uttryck är ett bråk där täljaren $p(x)$ och nämnaren $q(x)$ är båda polynom. Det vill säga $\frac{p(x)}{q(x)}$, där $q(x) \neq 0$.

Vi hanterar några exempel där vi ska avgöra vilka uttryck som är rationella eller inte. Resterande uppgifter kommer att hantera förenklingar av rationella uttryck. Till dessa kommer vi att behöva använda exempelvis faktoriseringsmetoder.

Exempel 1) Avgör om följande uttryck är rationella

$$a) \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 - 1,2x}$$

$$b) \frac{x + \sqrt{x}}{x^2 + 2x}$$

$$c) \frac{x^2 - 0,5x^3}{x^2 + x^{-2}}$$

Lösning:

a) Täljaren $x^2 + 2x + 3$ är ett polynom. Nämnaren $x^2 - 1,2x$ är ett polynom. Då är uttrycket rationellt.

Svar: Uttrycket är rationellt.

Exempel 2) Förkorta rationella uttrycken så långt som möjligt.

$$a) \frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

$$b) \frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$$

$$c) \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$d) \frac{6x^2y^4 - 9x^4y^2}{3xy^2}$$

Lösning:

a) Vi faktorerar täljaren genom att bryta ut x och nämnaren genom att använda konjugatregeln.

$$\frac{x^2 - x}{x^2 - 1}$$

Efter faktoriseringen förkortar vi $x-1$ från både nämnaren och täljaren.

$$\frac{x(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x}{x+1}$$

$$\text{Svar: } \frac{x}{x+1}$$

b) Täljaren faktoriseras med hjälp av konjugatregeln och nämnaren med hjälp av första kvadreringsregeln.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9}$$

Efter faktoriseringen förkortar vi $x+3$ i täljaren med $(x+3)^2$.

$$\frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)^2}$$

$$\frac{x-3}{x+3}$$

$$\text{Svar: } \frac{x-3}{x+3}$$

b) Täljaren $x + \sqrt{x}$ är inte ett polynom. Då kan man redan avgöra att uttrycket inte är rationellt.

Svar: Uttrycket är inte rationellt.

c) Täljaren $x^2 - 0,5x^3$ är ett polynom. Nämnaren $x^2 + x^{-2}$ är inte ett polynom. Då är uttrycket inte rationellt.

Svar: Uttrycket är inte rationellt.

c) Vi faktorerar täljaren med hjälp av att hitta nollställena med pq-formeln.

$$x^2 - 3x + 2 \quad p = -3 \text{ och } q = 2.$$
$$x = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{8}{4}}$$

$$= \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Detta ger $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$

Vi faktorerar täljaren och nämnaren.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

$$\frac{(x-2)(x-1)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x-1}{x+2}$$

$$\text{Svar: } \frac{x-1}{x+2}$$

d) Faktorisera täljaren genom att bryta ut gemensam faktor.

$$\frac{6x^2y^4 - 9x^4y^2}{3xy^2}$$

$$\frac{3x^2y^2(2y^2 - 3x^2)}{3xy^2}$$

$$x(2y^2 - 3x^2)$$

$$\text{Svar: } 2xy^2 - 3x^3$$

Kommande exempel handlar om att förenkla ett uttryck som består av två eller flera rationella uttryck.

Exempel 3) Förenkla följande uttryck så långt som möjligt.

$$a) \frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} \qquad b) \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$c) \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3-x}$$

Lösning:

a) Vi förlänger båda bråken med varandras nämnare.

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(x+2) \cdot 1}{(x+2) \cdot x} + \frac{x \cdot 1}{x \cdot (x+2)}$$

$$\frac{x+2+x}{x(x+2)}$$

$$\frac{2x+2}{x^2+2x}$$

$$\text{Svar: } \frac{2x+2}{x^2+2x}$$

b)

$$\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

$$\frac{(x+2) \cdot 2}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2) \cdot 1}{(x-2)(x+2)}$$

$$\frac{2x+4-(x-2)}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{2x+4-x+2}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x+6}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{x+6}{x^2-4}$$

$$\text{Svar: } \frac{x+6}{x^2-4}$$

c) I denna uppgift är det rimligt att förlänga bråken till minsta gemensamma nämnare.

I de två första delfrågorna ser vi att nämnaren inte går att faktorisera men i denna uppgift ser vi att den tredje termen går att faktorisera. Vi börjar med det.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^3-x}$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

Vi ser att den tredje termen innehåller faktorerna x och $x+1$ som finns i de två andra bråken. Detta innebär att denna term inte behöver förlängas. Och de andra två termerna behöver endast förlängas med de faktorer som "saknas".

$$\frac{(x+1)(x-1) \cdot 1}{(x+1)(x-1)x} - \frac{x(x-1) \cdot 1}{x(x-1)(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x^2-1-(x^2-x)+1}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{x}{x(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

$$\frac{1}{x^2-1}$$

$$\text{Svar: } \frac{1}{x^2-1}$$

Lektion 4: Uppgifter

Uppvärmning

U4 Förkorta och förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

- a) $\frac{2x+2}{2x}$ b) $\frac{x^2+2x}{2x}$
c) $\frac{x^2-9}{x+3}$ d) $\frac{x+3}{x^2-9}$
e) $\frac{4x+2}{2x+1}$ f) $\frac{x^2+6x+5}{x+1}$
g) $\frac{y-x^2y}{2xy}$ h) $\frac{x+1}{2x} + \frac{2}{x}$

Grundläggande

401 Förkorta följande uttryck så långt som möjligt:

- a) $\frac{x^2+x}{5x+5}$ b) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$
c) $\frac{x^2+2x-8}{2x-4}$ d) $\frac{4x^2y^3-6x^4y^3}{6x^2y^3}$

402 Förenkla följande uttryck så långt som möjligt:

- a) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ b) $\frac{1}{x-1} + \frac{x}{x+1}$

403 Bestäm ett heltalsvärde på a så att uttrycket nedan går att förkorta.

$$\frac{2x+a}{x+2}$$

404 Avgör vilka av följande uttryck som är rationella:

- a) $\frac{x^5+3x^2-5+x^{-1}}{x^2+3x^5}$ b) $\frac{x^3+3^x}{5x+1}$
c) $\frac{x^2+\sqrt{x}}{x^2+x}$ d) $\frac{3x-x^5}{3x+\sqrt{5}}$
e) $\frac{2x+x^2+\pi}{4}$

Avancerat

405 Förkorta följande uttryck:

- a) $\frac{2x^2+2x-24}{4x^2-8x-12}$ b) $\frac{x^2y+yx^2}{2(y^2x+x^2y)}$

406 Förenkla följande uttryck:

$$\frac{3}{x} - \frac{1}{x(x+2)} + \frac{1}{x+2}$$

407 Undersök om $a=1$ gör att likheten nedan stämmer.

$$\frac{x^2+2x+a}{x^2-a} = \frac{x+1}{x-1}$$

408 Bestäm för vilka heltalsvärden på n som gör att uttrycket nedan blir rationellt.

$$\frac{x^{-n}+x^3}{n-x}$$

409 Bestäm ett heltalsvärde på C så att uttrycket nedan går att förkorta.

$$\frac{x^3+2x^2+C}{x+2}$$

Fördjupning

410 Förkorta följande uttryck:

- a) $\frac{x^4-x^6}{1-x^4}$
b) $\frac{(x^2-y^2)^2}{(x^2+2xy+y^2)(x^2-2xy+y^2)}$

411 Förenkla följande uttryck:

$$\frac{2}{x^2-1} + \frac{2}{x^2+2x+1}$$

412 Ge ett exempel på polynomet $f(x)$ så att $f(x) \cdot g(x)$ blir ett rationellt uttryck om $g(x) = \frac{x^{-2}+x^2}{\sqrt{2} \cdot x}$.

413 Förkorta uttrycket $\frac{x+ay}{y+ax}$ om

- a) $a=1$ b) $a=-1$

414 Bestäm alla heltalsvärden på a så att uttrycket nedan går att förkorta.

$$\frac{x^2-x+2a}{x^3-2x^2-3x}$$