Innehållsförteckning

BLOCK 1

Andragradsfunktioner

Innehåll:

Lektion 1: Parentesregler och faktorisering

I denna lektion kommer vi att repetera parentesregler och faktorisering.

1) Multiplicera ihop två parenteser (förenkla)
2) Bryta ut (faktorisera).

Vi börjar med parentesregler och då finns det två varianter av distributiva lagen:

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(a+b)(c+d)=ac+ad+bc+bd$$

Exempel 1) Förenkla $6(x-2)$

Lösning:

$6(x-2)$

$6 \cdot x-6 \cdot 2$

$6x-12$

Svar: $6x-12$

Exempel 2) Förenkla $2y(y-3)$

Lösning:

$2y(y-3)$

$2y \cdot y-2y \cdot 3$

$2y^2-6y$

Svar: $2y^2-6y$

Exempel 3) Förenkla $(2+3x)(3+5x)$

Lösning:

$(2+3x)(3+5x)$

$2 \cdot 3+2 \cdot 5x+3x \cdot 3+3x \cdot 5x$

$6+10x+9x+15x^2$

$15x^2+19x+6$

Svar: $15x^2+19x+6$

Exempel 4) Förenkla $3(x-2)(3-x)$

Lösning:

$3(x-2)(3-x)$

$3(x \cdot 3-x \cdot x-2 \cdot 3+2 \cdot x)$

$3(3x-x^2-6+2x)$

$3(5x-x^2-6)$

$15x-3x^2-18$

Svar: $-3x^2+15x-18$

Exempel 5) Förenkla $\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^2$

Lösning:

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)^2$

$\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{x}\right)$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}-\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}-\sqrt{2} \cdot \sqrt{x}+\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$2-\sqrt{2x}-\sqrt{2x}+x$

$2-2\sqrt{2x}+x$

Svar: $2-2\sqrt{2x}+x$

Exempel 6) Förenkla $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)$

Lösning:

$\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{5}\right)\left(\frac{x}{4}+\frac{y}{2}\right)$

$\frac{x}{3} \cdot \frac{x}{4}+\frac{x}{3} \cdot \frac{y}{2}-\frac{y}{5} \cdot \frac{x}{4}-\frac{y}{5} \cdot \frac{y}{2}$

$\frac{x^2}{12}+\frac{xy}{6}-\frac{xy}{20}-\frac{y^2}{10}$

$\frac{x^2}{12}+\frac{10xy}{60}-\frac{3xy}{60}-\frac{y^2}{10}$

$\frac{x^2}{12}+\frac{7xy}{60}-\frac{y^2}{10}$

Svar: $\frac{x^2}{12}+\frac{7xy}{60}-\frac{y^2}{10}$

Vi går över till att faktorisera genom att bryta ut största gemensamma faktor för termerna.

Exempel 7) Faktorisera $5x^2-10x$

Lösning:

$5 \cdot x \cdot x-5 \cdot 2 \cdot x$

$5 \cdot x \cdot x-5 \cdot 2 \cdot x$ Markera gemensamma faktorer.

$5x(x-2)$

Svar: $5x(x-2)$

Exempel 8) Förenkla $12y+36y^2$

Lösning:

$12 \cdot y+3 \cdot 12 \cdot y \cdot y$

$12 \cdot y+3 \cdot 12 \cdot y \cdot y$

$12y(1+3y)$ Observera att då $12y$ bryts ut från första termen blir det kvar 1 och inte 0.

Svar: $12y(1+3y)$

Exempel 9) Förenkla $\dfrac{5x}{6}-\dfrac{15x^2}{9}$

Lösning:

$$\frac{5x}{6}-\frac{15x^2}{9}$$

$$\frac{5 \cdot x}{2 \cdot 3}-\frac{3 \cdot 5 \cdot x \cdot x}{3 \cdot 3}$$

$$\frac{5x}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{3x}{3}\right)$$

$$\frac{5x}{3}\left(\frac{1}{2}-x\right)$$

Svar: $\dfrac{5x}{3}\left(\dfrac{1}{2}-x\right)$

Exempel 10) Förenkla $\dfrac{12x^3}{34y^3}+\dfrac{16x}{17y^5}$

Lösning:

$$\frac{12x^3}{34y^3}+\frac{16x}{17y^5}$$

$$\frac{3 \cdot 4 \cdot x \cdot x^2}{17 \cdot 2 \cdot y^3}+\frac{4 \cdot 4 \cdot x}{17 \cdot y^3 \cdot y^2}$$

$$\frac{4x}{17y^3}\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{4}{y^2}\right)$$

Svar: $\dfrac{4x}{17y^3}\left(\dfrac{3x^2}{2}+\dfrac{4}{y^2}\right)$

Vi avslutar med att lösa en ekvation där parentesreglerna används.

Exempel 11) Lös ekvationen $(x+2)^2=13+4x$

Lösning:

$(x+2)^2=13+4x$ Förenkla vänsterled.

$(x+2)(x+2)=13+4x$

$x^2+2x+2x+4=13+4x$

$x^2+4x+4=13+4x$ Subtrahera båda sidor med 4x.

$x^2+4=13$ Subtrahera båda sidor med 4.

$x^2=9$ Ta kvadratroten på båda sidorna.

$x=\pm 3$

Svar: $x=\pm 3$

Lektion 1: Uppgifter

Uppvärmning

U1 Lös följande uppgifter:

a) Förenkla: $5(x-2)$

b) Förenkla: $x(x-3)$

c) Förenkla: $2z(3-z)$

d) Förenkla: $2(k+2)(k-3)$

e) Faktorisera: $15-25x$

f) Faktorisera: $8c+12$

g) Faktorisera: $3x^2-6x$

h) Faktorisera: $12y-20y^2$

Grundläggande

101 Utveckla och förenkla:

a) $(2x^2+3y)(3x-y)$ b) $4(x+3)(x-3)$

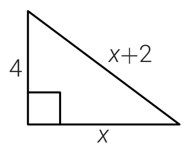
c) $(3x-4)^2$ d) $\left(\frac{x}{3}+5\right)\left(2x-\frac{1}{5}\right)$

102 Faktorisera följande:

a) $9x-18x^2$ b) $16u-24u^3$

c) $44h^2-33h^3$ d) $x-y$

103 Bestäm längden på hypotenusan i figuren nedan.



104 Lös ekvationen $2x=(x+1)^2-5$.

Avancerat

105 Utveckla och förenkla

a) $\left(\frac{x}{2}+\frac{3}{y}\right)\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{y}\right)$ b) $\left(\sqrt{x}+\sqrt{5}\right)^2$

c) $(2x-3y)(4x-y)(x-2y)$

106 Faktorisera följande:

a) $\frac{3x}{7}-\frac{x^2}{14}$ b) $\frac{55y^2}{6}+\frac{20}{9}$

c) $13x^2-11y$ d) $\frac{2}{t^2}-\frac{6}{t}$

107 Differensen av två kvadraters areor är 8 a.e. Bestäm sidorna hos dessa kvadrater om den ena kvadratens sidor är 2 l.e. längre än den andra kvadratens sidor.

108 Bestäm A så att likheten nedan gäller.

$$(4A-y)(3x-5y)=6x^2-13xy+5y^2$$

Fördjupning

109 Utveckla och förenkla

$$3x^2-\left(2-\frac{x}{2}\right)^2\cdot\frac{x-1}{3}$$

110 Faktorisera följande:

a) $\frac{45x^2}{13y}-\frac{27x}{39y^3}$ b) $\frac{12h}{20}-\frac{21h^4}{35}$

c) $4a^2b^3c^4-8ab^4c^6$ d) $71abc-73xyz$

111 Multiplicera ihop parenteserna:

a) $\left(\frac{2y^2}{5}-\frac{3z}{4x}\right)\left(-\frac{xy}{z}+\frac{2xyz}{-2}\right)$

b) $\left(\frac{2xy^2}{3}-\frac{3x^2z^3}{5}\right)\left(\frac{3z^2y}{4}+\frac{z^3}{7}\right)$

112 Undersök om följande likhet stämmer:

$$(x+y+z)^2=(x+y)^2+z(z+2x+2y)$$

Lektion 2: Konjugat- och kvadreringsreglerna

I denna lektion introduceras tre regler för att utveckla parenteser. Dessa är:

1) Första kvadreringsregeln: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2) Andra kvadreringsregeln: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) Konjugatregeln: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Högerled i varje formel är en förenkling av vänsterled. Dessa används för att snabbare utveckla parenteser.
Vi bevisar första kvadreringsregeln:

$$(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a\cdot a+a\cdot b+a\cdot b+b\cdot b=a^2+2ab+b^2$$

De andra två lämnas som en övning åt läsaren.

Exempel 1) Utveckla och förenkla $(x+1)^2$.

Lösning: Till denna används första kvadreringsregeln då det är plus mellan termerna och parentesen är i kvadrat.

$(x+1)^2$ — $a=x$ och $b=1$ i detta fall.
Sätt in i $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

$x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2$

x^2+2x+1

Svar: x^2+2x+1

Exempel 2) Utveckla och förenkla $(x-3)^2$.

Lösning: Till denna används andra kvadreringsregeln då det är minus mellan termerna och parentesen är i kvadrat.

$(x-3)^2$ — $a=x$ och $b=3$ i detta fall.
Sätt in i $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

$x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2$

x^2-6x+9

Svar: x^2-6x+9

Exempel 3) Utveckla och förenkla $(x+4)(x-4)$.

Lösning: Till denna används konjugatregeln då det finns två "likadana" parenteser men det är plus mellan termerna i ena och vice versa i den andra.

$(x+4)(x-4)$ — $a=x$ och $b=4$ i detta fall.
Sätt in i $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

x^2-4^2

x^2-16

Svar: x^2-16

Exempel 4) Utveckla och förenkla $3(2-x)(x+2)$.

Lösning: Vi använder konjugatregeln igen. 3:an innan första parentesen kommer att hanteras sist.

$3(2-x)(x+2)$ — Vi skriver om denna först genom att byta plats på x och 2 i andra parentesen. Att "minus" parentesen kommer först har ingen betydelse.

$3(2-x)(2+x)$ — $a=2$ och $b=x$ i detta fall.
Sätt in i $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.

$3(2^2-x^2)$

$3(4-x^2)$

$12-3x^2$

Svar: $12-3x^2$

Vi går över till mer utmanande uppgifter som hanterar flera termer eller bråk.

Exempel 5) Utveckla och förenkla $(2x-y)^2$.

Lösning: Vi använder andra kvadreringsregeln.

$(2x-y)^2$ — $a=2x$ och $b=y$ i detta fall. Sätt in i $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$. Eftersom att $a=2x$ är en produkt måste en parentes användas.

$(2x)^2-2\cdot(2x)\cdot y+y^2$

$2^2x^2-4xy+y^2$

$4x^2-4xy+y^2$

Svar: $4x^2-4xy+y^2$

Exempel 6) Utveckla och förenkla $\left(3-x^2\right)^2-(x+3)(x-3)$.

Lösning: För vänstra termen används andra kvadreringsregeln och för den högra används konjugatregeln.

$\left(3-x^2\right)^2-(x+3)(x-3)$

$3^2-2\cdot 3\cdot x^2+\left(x^2\right)^2-\left(x^2-3^2\right)$

$9-6x^2+x^{2\cdot 2}-\left(x^2-9\right)$

$9-6x^2+x^4-x^2+9$

x^4-7x^2+18

Svar: x^4-7x^2+18

Exempel 7) Utveckla och förenkla $\left(\frac{y}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{y}{3}+\frac{x^2}{4}\right)$.

Lösning:

$\left(\frac{y}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{y}{3}+\frac{x^2}{4}\right)$

$\left(\frac{y}{3}\right)^2-\left(\frac{x^2}{4}\right)^2$

$\frac{y^2}{3^2}-\frac{\left(x^2\right)^2}{4^2}$

$\frac{y^2}{9}-\frac{x^4}{16}$

Svar: $\frac{y^2}{9}-\frac{x^4}{16}$

Exempel 8) Utveckla och förenkla $\left(\sqrt{x+2}+x\right)^2$.

Lösning:

$\left(\sqrt{x+2}+x\right)^2$

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2+2\cdot\sqrt{x+2}\cdot x+x^2$

$x+2+2x\sqrt{x+2}+x^2$

$x^2+2x\sqrt{x+2}+x+2$

Svar: $x^2+2x\sqrt{x+2}+x+2$

Vi avslutar med att lösa en ekvation där reglerna används.

Exempel 9) Lös ekvationen $(x+2)^2=(x-4)(x+4)$.

Lösning: Vi börjar med att förenkla vardera led.

V.L.$=(x+2)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2=x^2+4x+4$

H.L.$=(x-4)(x+4)=x^2-4^2=x^2-16$

Sätt V.L.=H.L.

$x^2+4x+4=x^2-16$ — Subtrahera med x^2.

$4x+4=-16$ — Subtrahera med 4.

$4x=-20$ — Dividera med 4.

$x=-5$

Svar: $x=-5$

Lektion 2: Uppgifter

Uppvärmning

U2 Förenkla följande:

a) $(x+1)^2$ b) $(x-2)^2$

c) $(3+x)^2$ d) $(a+b)^2$

e) $(x+5)(x-5)$ f) $(2x-3)^2$

g) $(3+x)(3-x)$ h) $(2x+3)(2x-3)$

Grundläggande

201 Lös följande uppgifter:

a) Utveckla $(x+2)^2$

b) Utveckla $(x+3)^2$

c) Utveckla $(x+4)^2$

d) Utveckla $(x+5)^2$

e) Kan du se vad som ska stå i de tomma rutorna?

$$(x+6)^2 = x^2 + \square x + \square$$

202 Utveckla och förenkla:

a) $(4x+y)^2$ b) $(-2x+5)(5+2x)$

c) $\left(\frac{x}{8} - 2y\right)^2$ d) $3(x-2)(x+2)$

e) $-(3x+y^2)^2$

203 Lös ekvationerna:

a) $(x+8)^2 = (x-3)^2$ b) $(a+1)^2 + (a-1)^2 = 4$

204 Om $f(x) = x^2$ bestäm $f(a+1)$.

Avancerat

205 Utveckla och förenkla:

a) $(7-x^2)^2 - (x+1)(x-1)$ b) $\left(\frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{x}\right)\left(\frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{x}\right)$

c) $\left(\sqrt{x+1} - 2x\right)^2$

206 Ange ett värde på a och b så att likheten $(a+3y)^2 = 4x^2 + b + 9y^2$ gäller.

207 Om $f(x) = x+2$ bestäm $(f(x))^2$.

Fördjupning

208 Utveckla och förenkla:

a) $a\left(2a - \frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3} + \frac{a^2}{2}\right)$

b) $\left(\frac{2a}{3} - \frac{3-a}{4}\right)^2$

c) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{x^2}{5}\right)^2 - \left(2x + (3x)^2\right)^2$

d) $\left(\frac{2x}{y} - \frac{y}{2x}\right)^2 - \left(\frac{2y}{x} - \frac{y}{2y}\right)^2$

209 Bestäm $\dfrac{f(a+2) - f(a)}{2}$ om $f(x) = x^2$.

210 Bestäm möjliga värden på a så att likheten nedan stämmer.

$$\left(a + \sqrt{a}\right)^2 = 16x^6 + \square + \square$$

Lektion 3: Faktorisering

I denna lektion ska vi faktorisera med konjugat- och kvadreringsreglerna. Detta innebär att vi kommer att använda reglerna "baklänges" för att faktorisera, till detta behöver man ha koll på vilken regel som passar. Vi skriver upp reglerna igen.

1) Första kvadreringsregeln: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

2) Andra kvadreringsregeln: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3) Konjugatregeln: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Vi börjar med uttryck som inte går att faktorisera genom att bryta ut en gemensam faktor, utan vi fokuserar endast på uttryck som går att fokusera enbart med dessa tre regler. Därefter går vi över till att även bryta ut gemensamma faktorer.

Exempel 1) Faktorisera x^2-16

Lösning: Detta uttryck innehåller endast två termer samt att ena termen är positiv och andra termen är negativ. Detta indikerar på att uttrycket kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln.

x^2-16	Vi måste identifiera vilken term som är *a* och vilken som är *b*. Skriv om uttrycket som kvadrater.
x^2-4^2	$a=$x och $b=4$ i detta fall. Sätt in i $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
$(x+4)(x-4)$	
	Svar: $(x+4)(x-4)$

Exempel 2) Faktorisera x^2+6x+9.

Lösning: Detta uttryck innehåller tre termer, vilket indikerar på att detta är första eller andra kvadreringsregeln. Då samtliga termer är positiva vet vi att detta är första kvadreringsregeln.

x^2+6x+9	Vi måste identifiera vilken term som är *a* och vilken som är *b*. Skriv om första och sista termen i uttrycket som kvadrater.
x^2+6x+3^2	$a=$x och $b=3$ i detta fall. Sätt in i $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
$(x+3)^2$	Vi är klara men vi behöver kontrollera att detta stämmer.
$(x+3)^2$	
$x^2+2\cdot x\cdot 3+3^2$	
x^2+6x+9	Stämmer!
	Svar: $(x+3)^2$

När man faktoriserar med hjälp av dessa tre regler behöver man undersöka vilken regel som passar. I exempel 1, så som det förklaras i uppgiften, används konjugatregeln då den har två termer där ena är positiv och den andra negativ. För exempel 2 har den tre positiva termer.

För exempel 2 har vi ytterligare en detalj som behöver klargöras. Tittar vi på uttrycket x^2+6x+3^2 har vi termen $6x$. Denna har vi ignorerat i uppgiften när vi faktoriserat. Detta är anledningen till att vi kontrollerar utifall att det faktoriserade uttrycket stämmer. Det är även viktigt att påpeka att termen $6x$ inte försvinner, utan den "kommer ut" när man utvecklar parenteserna.

Vi går över till fler exempel.

Exempel 3) Faktorisera $4x^2-20x+25$.

Lösning: Detta uttryck innehåller tre termer, vilket indikerar på att detta är första eller andra kvadreringsregeln. Då andra termen är negativ vet vi att detta är andra kvadreringsregeln.

$4x^2-20x+25$	Vi måste identifiera vilken term som är a och vilken som är b. Skriv om första och sista termen i uttrycket som kvadrater.
$(2x)^2-20x+5^2$	$a=2x$ och $b=5$ i detta fall. Sätt in i $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
$(2x-5)^2$	Kom ihåg att kontrollera!
	Svar: $(x-5)^2$

Exempel 4) Faktorisera $-x^2+49$.

Lösning: Detta uttryck innehåller endast två termer samt att ena termen är positiv och andra termen är negativ. Detta indikerar på att uttrycket kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln.

$-x^2+49$	Innan vi använder konjugatregeln är det bra att skriva om uttrycket i "rätt ordning".
$49-x^2$	Vi skriver om uttrycket i kvadrater.
7^2-x^2	$a=7$ och $b=x$ i detta fall. Sätt in i $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
$(7+x)(7-x)$	
	Svar: $(7+x)(7-x)$

Nu går vi över till att faktorisera med både konjugat- och kvadreringsreglerna samt genom att bryta ut gemensamma faktorer. En bra tumregel är att först undersöka om man kan bryta ut en faktor och sedan faktorisera med reglerna.

Exempel 5) Faktorisera $3x^2+12x+12$.

Lösning: Detta uttryck innehåller tre termer, vilket indikerar på att detta är första eller andra kvadreringsregeln. Då samtliga termer är positiva vet vi att detta är första kvadreringsregeln.

$3x^2+12x+12$	Vi kan bryta ut en faktor 3.
$3(x^2+4x+4)$	Nu kan vi fokusera på parentesen.
$3(x^2+4x+2^2)$	$a=x$ och $b=2$ i detta fall. Sätt in i $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
$3(x+2)^2$	Kontrollera att detta stämmer.
	Svar: $3(x+2)^2$

Exempel 6) Faktorisera och förenkla $\dfrac{x^2+6x+9}{x^2-9}$.

Lösning: Täljaren faktoriseras med hjälp av första kvadreringsregeln och nämnaren med konjugatregeln.

$$\frac{x^2+6x+9}{x^2-9}$$

$$\frac{x^2+6x+3^2}{x^2-3^2}$$

$$\frac{(x+3)^2}{(x+3)(x-3)}$$

$$\frac{x+3}{x-3}$$

Svar: $\dfrac{x+3}{x-3}$

Exempel 7) Faktorisera $\dfrac{4x^2}{25}-\dfrac{4xy}{15}+\dfrac{y^2}{9}$.

Lösning: Vi faktoriserar med hjälp av andra kvadreringsregeln.

$$\frac{4x^2}{25}-\frac{4xy}{15}+\frac{y^2}{9}$$

$$\left(\frac{2x}{5}\right)^2-\frac{4xy}{15}+\left(\frac{y}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{2x}{5}-\frac{y}{3}\right)^2$$

Svar: $\left(\dfrac{2x}{5}-\dfrac{y}{3}\right)^2$

Exempel 8) Faktorisera $2x^3+4x^2-18x-36$.

Lösning:

$2x^3+4x^2-18x-36$	Bryt ut $2x^2$ från de två första termerna och -18 ur de två sista.
$2x^2(x+2)-18(x+2)$	Nu kan vi bryta ut från $(x+2)$.
$(x+2)(2x^2-18)$	I den högra parentesen kan vi bryta ut en faktor 2.
$(x+2)2(x^2-9)$	Den högra parentesen kan faktoriseras med hjälp av konjugatregeln.
$(x+2)2(x+3)(x-3)$	
	Svar: $2(x+2)(x+3)(x-3)$

Lektion 3: Uppgifter

Uppvärmning

U3 Faktorisera följande:

a) x^2-25 b) x^2-49

c) $x^2+12x+36$ d) x^2-4x+4

e) $9-x^2$ f) $x^2+10x+25$

g) x^2-2x+1 h) $1+x^2-2x$

Grundläggande

301 Faktorisera

a) $14x^2+35x$ b) $50y^2-50y$

c) $4x^2-20x+25$ d) $3x^2+24x+48$

e) $-x^2+16$ f) $-x^2-6xy-9y^2$

g) x^2+4

302 Faktorisera och förenkla uttrycket:

$$\frac{x^2+4x+4}{x^2-4}$$

303 Patrik och Ulrika ska faktorisera uttrycket $12x^2-6x$. Patrik gör följande lösning:

$$12x^2-6x=6x(2x-0)=6x\cdot 2x$$

Ulrika tittar på Patrik och säger att detta inte stämmer. Vad för fel har Patrik gjort?

Avancerat

304 Faktorisera:

a) $15x^3y^6-25x^2y^7-10x^4y^5$

b) $(2+a)x-(2+a)y$

c) $4x^4+4x^3+x^2$

d) $x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$

305 Thylwe ska faktorisera uttrycket $x^2+10x+16$ och gör följande beräkning:

$$\sqrt{x^2}=x \qquad \sqrt{16}=4$$

$$x^2+10x+16=(x+4)^2$$

Undersök om detta stämmer.

Fördjupning

306 Faktorisera:

a) 2^x-2^{x+1}

b) $\dfrac{2x^2}{9}+\dfrac{2xy}{3}+\dfrac{y^2}{2}$

c) $(x+1)(x-4)+x^2+2x+1$

d) $x^3+x^2-4(x+1)$

e) $(x^2-1)^2-(x-1)^2$

307 Anta att du vill kunna faktorisera x^2+ax+b med hjälp kvadreringsreglerna. Vilket samband gäller då mellan a och b? Nedan följer fem alternativ. Vilken/vilka är korrekta?

$a=2b$ $a=2\sqrt{b}$ $a=-2b$

$a=-2\sqrt{b}$ $a=\sqrt{b}$

Lektion 4: Andragradsekvationer del 1

Tidigare har vi arbetat med det som kallas för linjära ekvationer, exempelvis $2x+3=12$. I denna lektion går vi över till att jobba med andragradsekvationer som skrivs på formen:

$$ax^2+bx+c=0$$

Detta kallas även för en fullständig andragradsekvation vilket vi inte arbetar med i denna lektion, utan vi kommer först att hantera två enklare fall, där den ena är något vi känner igen från tidigare. Dessa är:

$$ax^2+c=0 \text{ (saknar } x\text{-termen)}$$

$$ax^2+bx=0 \text{ (saknar konstanttermen)}$$

Den första varianten använder man roten ur för att lösa och den andra används en faktoriseringsmetod, så kallad nollproduktmetoden, som vi tar upp i exempel 2. Låt oss hoppa på några exempel.

Exempel 1) Lös ekvationen $3x^2=12$

Lösning:

$3x^2=12$	Dividera båda sidorna med 3.
$x^2=4$	Ta roten ur på båda sidorna.
$x=\pm\sqrt{4}$	
$x=\pm 2$	
	Svar: $x=\pm 2$

Exempel 2) Lös ekvationen $(x-2)(x+3)=0$.

Lösning: För denna variant ska nollproduktsmetoden appliceras.

$(x-2)(x+3)=0$	Eftersom att V.L. är en produkt som ska bli 0 kan man tänka sig att endast en parentes behöver bli 0 när man sätter in ett x-värde.
$(x-2)=0$	Vi ser att $x=2$ är ett svar. Men även den andra parentesen kan bli 0, det innebär att vi har ett till svar.
$(x+3)=0$	$x=-3$ är det andra svaret.
	Svar: $x_1=2$ och $x_2=-3$.

Nollproduktsmetoden är en effektiv metod för att lösa vissa andragradsekvationer, speciellt om de redan är faktoriserade. Men för att klargöra vad det är vi ha räknat ut ska vi göra en kontroll för båda svaren så att vi ser att de stämmer.

För $x_1=2$ i $(x-2)(x+3)=0$ får vi att:

V.L.$=(2-2)(2+3)=0\cdot 5=0=$H.L.

Viktigt att påpeka att $x_1=2$ sätts in i båda x-platserna, det är ju trots allt x på båda platserna.

För $x_2=-3$ i $(x-2)(x+3)=0$ får vi att:

V.L.$=(-3-2)(-3+3)=-5\cdot 0=$H.L.

Nollproduktsmetoden fungerar endast om produkten är noll. Metoden fungerar exempelvis inte för $(x-2)(x+3)=7$ då det inte är 0.

Vi gör fler exempel, där det också finns varianter där man först måste själv faktorisera för att sedan lösa.

Exempel 3) Lös ekvationen $10x^2-20x=0$

Lösning:

$10x^2-20x=0$ Bryt ut $10x$ från båda sidorna.

$10x(x-2)=0$ De två faktorerna i V.L. är $10x$ och $(x-2)$, alltså är det dessa två faktorer som ska bli 0.

$10x=0$ $x=0$ är det ena svaret.

$(x-2)=0$ $x=2$ är det ena svaret.

Svar: $x_1=0$ och $x_2=2$.

Exempel 4) Lös ekvationen $(3x-9)\left(\frac{x}{2}+3\right)=0$.

Lösning:

$(3x-9)\left(\frac{x}{2}+3\right)=0$

$(3x-9)=0$ $x=3$ efter att vi dividerar båda sidor med 3.

$\left(\frac{x}{2}+3\right)=0$ $x=-6$ är det andra svaret.

Svar: $x_1=3$ och $x_2=-6$.

Exempel 5) Lös ekvationen $(x+2)^2=36$.

Lösning:

$(x+2)^2=36$ Detta är likt situationen $x^2=36$, vilket man löser genom att ta kvadratroten på båda sidorna. Vi gör likadant här.

$x+2=\pm\sqrt{36}$

$x+2=\pm 6$ Subtrahera båda sidorna med 2.

$x=-2\pm 6$ Vi får två svar.

$x=-2+6$ $x=4$ är det ena svaret.

$x=-2-6$ $x=-8$ är det andra svaret.

Svar: $x_1=4$ och $x_2=-8$.

Exempel 6) Lös ekvationen $x^2+14x+49=0$.

Lösning:

$x^2+14x+49=0$ Vi faktoriserar V.L. med hjälp av första kvadreringsregeln.

$(x+7)^2=0$ Detta kan skrivas om till två parenteser.

$(x+7)(x+7)=0$

$(x+7)=0$ $x=-7$

Då båda parenteserna är likadana får vi en så kallad dubbelrot. Det är två lösningar som har samma värde, alltså har vi en lösning. Lösningen kan då skrivas som:

Svar: $x_{1,2}=-7$.

I exempel 6 tas situationen upp som handlar om dubbelrot vilket är ett koncept vi kommer att gå in mer på senare men vi tar upp några delar nu. En andragradsekvation fungerar lite annorlunda från linjära ekvationer när det kommer till dess lösningar.
För en andragradsekvation kan tre situationer uppstå: "två olika reella rötter", "dubbelrot, vilket är två likadana reella rötter" och "icke-reella rötter". Reella rötter är det vi alltid fått när vi löst ekvationer men icke-reella rötter uppstår när man exempelvis tar kvadratroten ur negativa tal. Mer om detta tas upp när vi går genom andragradsfunktionen och dess graf.

Exempel 7) Lös ekvationen $x^2=-9$

Lösning:

$x^2=-9$ Ta kvadratroten ur båda sidorna.

Då vi inte kan kvadratroten ur ett negativt tal kan vi dra slutsatsen att ekvationen "saknar reell rot" eller har "icke-reella rötter".

$x=\pm\sqrt{-9}$ **Svar:** Saknar reell rot.

Exempel 8) Bestäm villkoren för a så att ekvationen $x^2+a=0$ får två olika rötter.

Lösning:

$x^2+a=0$ Subtrahera med a på båda sidorna.

$x^2=-a$ Ta kvadratroten ur båda sidorna

Då det står $-a$ i roten ur innebär det att $-a$ måste bli ett positivt tal, vilket det blir om $a<0$. a får inte vara 0, för då har vi inte två olika rötter, utan en dubbelrot.

$x=\pm\sqrt{-a}$

Svar: $a<0$

Lektion 4: Uppgifter

Uppvärmning

U4 Lös följande uppgifter:

a) Lös ekvationen $x^2=9$

b) Lös ekvationen $x^2-2x=0$

c) Lös ekvationen $2x^2=32$

d) Lös ekvationen $5x^2-15x=0$

e) Bestäm rötterna till ekvationen $(x+2)(x-3)=0$

f) Bestäm rötterna till ekvationen $x^2-49=0$

g) Bestäm rötterna till ekvationen $x^2+49x=0$

h) Bestäm rötterna till ekvationen $0=x+x^2$

Grundläggande

401 Lös ekvationerna:

a) $(x-3)^2=25$ b) $(x+2)(8-x)=0$

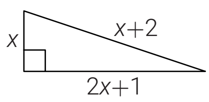
402 Bestäm rötterna till ekvationerna:

a) $2x^2-8x=0$ b) $(2x-10)\left(\dfrac{x}{3}-\dfrac{5}{3}\right)=0$

c) $x^2+4x+4=-x^2+4$

403 Ställ upp en ekvation som har lösningarna $x_1=17$ och $x_2=-\sqrt{5}$.

404 Bestäm x i figuren nedan.



Avancerat

405 Lös ekvationerna:

a) $(x-3)(x^2-7)=0$ b) $(x^2+9)(x-5)=0$

406 Bestäm rötterna till ekvationerna:

a) $3x^2-24x+48=0$ b) $a^2+6a+9=4$

c) $\left(\dfrac{x^4}{4}+1\right)\left(2+\sqrt{x}\right)\left(x^3+1\right)=0$

407 En vanlig ”wide-screen”-TV har förhållandet mellan sidorna 16:9. När man anger storleken på tv:n mäter man diagonalen i tum där 1 tum$=$2,54 cm. Bestäm arean givet i cm^2 på en 32 tum tv.

408 Bestäm möjliga värden på a så att ekvationen $a(x^2+a)=0$ har två rötter.

Fördjupning

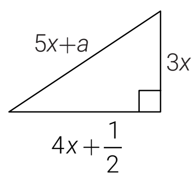
409 Lös ekvationerna:

a) $\dfrac{5x^2}{4}-\dfrac{5x}{3}+\dfrac{5}{9}=0$ b) $x^2-x+\dfrac{1}{4}=16$

c) $(x+2)5-(x+2)x^2=x+2$

410 Bestäm villkor för b så att $x^2+a^2+ab=0$ går att lösa om $a<0$.

411 Observera triangeln nedan och bestäm x uttryckt i a.



Lektion 5: Andragradsekvationer del 2

I denna lektion ska vi hantera en fullständig andragradsekvation: $ax^2+bx+c=0$.

Skillnaden mellan denna ekvation och det som togs upp tidigare är att nu innehåller ekvationen samtliga termer.
Det finns flera tillvägagångssätt för att lösa denna typ av andragradsekvation men den som vi kommer använda oss av är PQ-formeln. Denna formel ser ut som följande.

$$x^2+px+q=0$$

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

Den övre ekvationen är ett villkor för andragradsekvationen. Då en ekvation har exakt denna form kan man bestämma vad p och q ska vara för att sedan sätta in det i den nedre ekvationen. Låt oss lösa ett par exempel där p och q är enkla att se.

Exempel 1) Lös ekvationen $x^2+6x+5=0$.

Lösning:

$x^2+6x+5=0$ Ekvationen ser ut som den övre ekvationen och då kan man se att $p=6$ och $q=5$. Då kan vi sätta in detta i den nedre ekvationen.

$$x=-\frac{6}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2-5}$$

Efter insättning kan vi beräkna det som står, ett steg i taget.

$$=-3\pm\sqrt{3^2-5}$$

$$=-3\pm\sqrt{9-5}$$

$$=-3\pm\sqrt{4}$$

$$=-3\pm2$$

$x=-3+2=-1$ $x=-1$ är det ena svaret.

$x=-3-2=-5$ $x=-5$ är det andra svaret.

Svar: $x_1=-1$ och $x_2=-5$.

Exempel 2) Lös ekvationen $x^2+4x-5=0$.

Lösning:

$x^2+4x-5=0$ Ekvationen ser ut som den övre ekvationen och då kan man se att $p=4$ och $q=-5$. Uppmärksamma att q är negativ i detta fall.

$$x=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-(-5)}$$

Efter insättning kan vi beräkna det som står, ett steg i taget.

$$=-2\pm\sqrt{2^2+5}$$

$$=-2\pm\sqrt{4+5}$$

$$=-2\pm\sqrt{9}$$

$$=-2\pm3$$

$x=-2+3=1$ $x=-1$ är det ena svaret.

$x=-2-3=-5$ $x=-5$ är det andra svaret.

Svar: $x_1=1$ och $x_2=-5$.

Konstanterna p och q kan vara positiva eller negativa vilket är något som måste uppmärksammas när man sätter in de i formeln. Detta hanteras i de kommande uppgifter samt att vi går över till några varianter där man måste skriva om andragradsekvationen innan man kan använda formeln. Vi ska även ta upp situationer som leder till att hantera ekvationen i bråkform också.

Exempel 3) Lös ekvationen $2x^2-20x=22$.

Lösning:

$2x^2-20x=22$ Denna måste skrivas om.
Vi subtraherar 22 på båda sidorna.

$2x^2-20x-22=0$ Dividera båda sidorna med 2.

$x^2-10x-11=0$ Vi ser att $p=-10$ och $q=-11$.

$$x=-\frac{-10}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-10}{2}\right)^2-(-11)}$$

$$=5\pm\sqrt{(-5)^2+11}$$

$$=5\pm\sqrt{25+11}$$

$$=5\pm\sqrt{36}$$

$$=5\pm6$$

$x=5+6=11$ $x=11$ är det ena svaret.

$x=5-6=-1$ $x=-1$ är det andra svaret.

Svar: $x_1=11$ och $x_2=-1$.

Exempel 4) Lös ekvationen $x^2-9x=-8$.

Lösning: För denna måste vi hantera bråk.

$x^2-9x=-8$ Addera 8 på båda sidorna.

$x^2-9x+8=0$ Vi ser att $p=-9$ och $q=8$.

$$x=-\frac{-9}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2-8}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{(-9)^2}{2^2}-8}$$

Lägg dit en hjälp-etta under 8:an.

$$=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{8\cdot4}{1\cdot4}}=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{32}{4}}$$

$$=\frac{9}{2}\pm\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{9}{2}\pm\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{4}}=\frac{9}{2}\pm\frac{7}{2}$$

$$x_1=\frac{16}{2}=8$$

$$x_2=\frac{2}{2}=1$$

Svar: $x_1=1$ och $x_2=8$.

Vi avslutar med två uppgifter som hanterar intressanta situationer som kan uppstå med rotuttrycket i formeln.

Exempel 5) Lös ekvationen $x^2+4x+4=0$.

Lösning:

$x^2+4x+4=0$ $p=4$ och $q=4$.

$$x=-\frac{4}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2-4}$$

$$=-2\pm\sqrt{2^2-4}$$

$$=-2\pm\sqrt{4-4}$$

$$=-2\pm\sqrt{0}$$

$$=-3\pm0$$

$x=-3+0=-3$

$x=-3-0=-3$ Då det blir 0 i rotuttrycket får vi två likadana rötter, alltså har vi en dubbelrot.

Svar: $x_{1,2}=-3$.

Exempel 6) Lös ekvationen $x^2-12x+50=0$.

Lösning:

$x^2-12x+50=0$ $p=-12$ och $q=50$.

$$x=-\frac{-12}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-12}{2}\right)^2-50}$$

$$=6\pm\sqrt{(-6)^2-50}$$

$$=6\pm\sqrt{36-50}$$

$$=6\pm\sqrt{-14}$$

Eftersom att det blir negativt i rotuttrycket får vi icke-reella rötter. Det innebär att vi inte kan lösa denna ekvation.

Svar: Saknar reella lösningar.

Lektion 5: Uppgifter

Uppvärmning

U5 Lös följande ekvationer:

a) $x^2+6x-7=0$

b) $x^2+10x+9=0$

c) $x^2-2x+1=0$

d) $x^2-10x+24=0$

e) $x^2+4x+3=0$

f) $x^2-7x+2=0$

g) $x^2+9x-9=0$

h) $2x^2+4x-6=0$

Grundläggande

501 Lös ekvationerna:

a) $x^2-6x=-5$ b) $2x^2+4x-16=0$

c) $8x-x^2=15$ d) $x^2+2x+1{,}0001=0$

e) $0{,}2x^2+2{,}4x+4=0$ f) $x^2-5x+8=3x-4$

502 En rektangels sida är 3 l.e. längre än den andre. Bestäm sidornas längd om arean är 152 a.e.

503 Följande är givet för två cirklar:

I) Den enas radie är 2 l.e. längre än den andres.

II) Summan av deras areor är 97 a.e.

Bestäm cirklarnas radier.

Avancerat

504 Lös ekvationerna utan en räknare:

a) $x^2-5x+6=0$ b) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{x}{9}+\dfrac{1}{108}=0$

505 Lös ekvationen:

$$3(x+2)(x-2)+(x+1)(x-2)=0$$

506 Om man ökar en viss cirkels radie med 2 l.e. ökar arean med 40%. Bestäm cirkelns radie innan förändring.

507 För vilka värden på a saknas reella rötter om $x^2+3x-a=0$?

508 Summan av två på varandra följande positiva heltal i kvadrat blir 41. Bestäm dessa två tal.

Fördjupning

509 Lös ekvationerna:

a) $2x^2-\dfrac{4x}{15}-\dfrac{2}{15}=0$ b) $4x^2-\dfrac{4x+8}{3}=0$

510 Visa att ekvationen $x^2+px+q=0$ saknar reella lösningar om $q>\left(\dfrac{p}{2}\right)^2$.

511 För vilka värden på a har följande ekvation två reella rötter om $x^2+2ax-a=0$?

512 Visa med två exempel att följande påstående stämmer: ”Om man har ekvationen $x^2+px+q=0$ så gäller att summan av rötterna med omvänt tecken blir p, och produkten av rötterna blir q.”

513 Visa att ekvationen $x^2-(a+b)x+ab=0$ har rötterna:

$$\begin{cases} x_1=a \\ x_2=b \end{cases}$$