

Innehållsförteckning

• Block 1: Grundläggande ekvationslösning	4
• Lektion 1: Prioriteringsreglerna	5
• Lektion 2: Rationella tal och bråk	9
• Lektion 3: Algebraiska uttryck	12
• Lektion 4: Ekvationslösning del 1	15
• Lektion 5: Ekvationslösning del 2	19
• Lektion 6: Ekvationslösning del 3	23
• Lektion 7: Formulera uttryck	27
• Lektion 8: Faktorisering och multiplikation av uttryck	32
• Lektion 9: Linjära olikheter	35
• Block 2: Potenser och procent	39
• Lektion 10: Potensregler	40
• Lektion 11: Kvadratrötter	45
• Lektion 12: Kubikrötter	48
• Lektion 13: Potensekvationer	51
• Lektion 14: Procent	54
• Lektion 15: Förändringsfaktor	57
• Lektion 16: Index	62
• Lektion 17: Ränta och amortering med kalkylprogram	67
• Lektion 18: Problem ur matematikens kulturhistoria med kalkylprogram	72
• Block 3: Funktioner del 1	75
• Lektion 19: Funktioner	76
• Lektion 20: Funktioner och grafer	81
• Lektion 21: Definitions- och värdemängd	85
• Lektion 22: Linjära funktioner	89
• Lektion 23: Potensfunktioner	93
• Lektion 24: Exponentialfunktioner	98
• Lektion 25: Grafiska lösningar	102
• Lektion 26: Linjära- kontra exponentialfunktioner	104
• Block 4: Funktioner del 2	107
• Lektion 27: Räta linjen	108
• Lektion 28: Tillämpade linjära funktioner	112
• Lektion 29: Lutningar	116
• Lektion 30: Räta linjens ekvation	120
• Lektion 31: Parallella och vinkelräta linjer	124
• Lektion 32: Mer om funktionsuttryck	128
• Block 5: Sannolikhet och statistik	131
• Lektion 33: Slumpförsök	132
• Lektion 34: Slumpförsök i flera steg	135
• Lektion 35: Träddiagram	138
• Lektion 36: Beroende- och komplementhändelser	142
• Lektion 37: Statistiska begrepp	146
• Lektion 38: Vektorer (Endast Ma1c)	149
• Lektion 39: Trigonometri (Endast Ma1c)	153
• Lektion 40: Trigonometri och vektorer (Endast Ma1c)	156
• Facit	159
• Formelsamling	175

BLOCK 1

Grundläggande ekvationslösning

Innehåll:

Prioriteringsreglerna

Rationella tal och bråk

Algebraiska uttryck

Ekvationslösning del 1

Ekvationslösning del 2

Ekvationslösning del 3

Formulera uttryck

Faktorisering och multiplikation av uttryck

Linjära olikheter

Lektion 1: Prioriteringsreglerna

I detta avsnitt hanteras prioriteringsreglerna samt hantering av subtraktion och minustecken.

Det finns lite olika minnesregler för prioriteringsreglerna. Du har säkert lärt dig några från högstadiet. Använd gärna dem! Men här presenteras en lista på hur du ska prioritera, uppifrån och ner:

1. Parenteser.
2. Multiplikation och Division. Dessa har samma prioritet vilket innebär att man kan bestämma själv. Det vill säga att det går att utföra en multiplikation före en division eller tvärtom.
3. Addition och Subtraktion. Samma som multiplikation och division. Man väljer ordningen själv.

Här kommer några exempel.

Exempel 1) Beräkna $-4+3\cdot 4$

Lösning:

$$-4+3\cdot 4$$

$$-4+12$$

$$8$$

Multiplitera 3 och 4 först.

Addera negativt 4 med 12.

Svar: 8

Exempel 2) Beräkna $-(-1)+2$

Lösning:

$$-(-1)+2$$

$$1+2$$

$$3$$

Öppna parentesen först.

Adderar 1 med 2.

Svar: 3

Exempel 3) Beräkna $12-\frac{10}{5}\cdot(2-5)$

Lösning:

$$12-\frac{10}{5}\cdot(2-5)$$

Börjar med parentesen.

$$12-\frac{10}{5}\cdot(-3)$$

Det går att antingen multiplicera 10 med 3 eller dividera 10 med 5. I detta exempel utförs divisionen först.

$$12-2\cdot(-3)$$

$$12+6$$

$$18$$

Multiplitera 2 med negativt 3.

Addera 12 med 6.

Svar: 18

Vi tar en närmre titt på hantering av negativa tal och subtraktion då det brukar finnas ett missförstånd kring detta.

Exempel 4) Vad är skillnaden mellan $-2-3$ samt $2-(-3)$?

I det första uttrycket, $-2-3$, subtraherar vi negativt 2 med det positiva talet 3.

I det andra uttrycket, $2-(-3)$, subtraherar vi positivt 2 med det negativa talet 3.

Slutsatsen är att första uttrycket blir $-2-3=-5$

Andra uttrycket blir $2-(-3)=2+3=5$

Exempel 5) Beräkna $3 - \frac{3+2 \cdot 3}{9}$

Lösning:

$$3 - \frac{3+2 \cdot 3}{9}$$

I både nämnaren och täljaren gömmer sig hemliga parenteser som markeras i nästa rad.

$$3 - \frac{(3+2 \cdot 3)}{(9)}$$

I nämnaren finns det inget intressant, alltså kan den parentesen öppnas direkt. I täljaren sker det något som måste hanteras. I parentesen behöver man hantera prioriteringsreglerna igen. Alltså multipliceras 2 och 3 med varandra och därefter adderas produkten med 3.

$$3 - \frac{9}{9}$$

Nu är det bara att hantera uppgiften som tidigare uppgifter.

$$3 - 1$$
$$2$$

Svar: 2

Exempel 6) Beräkna $\frac{-\frac{8}{4} + (-1) \cdot 2}{3-5}$

Lösning:

$$\frac{-\frac{8}{4} + (-1) \cdot 2}{3-5}$$

Utför beräkningar i nämnaren och täljaren var för sig.
Följ prioriteringsreglerna.

$$\frac{-2-2}{-2}$$

Beräkna differensen i täljaren.

$$\frac{-4}{-2}$$

Utför divisionen. Ett negativt tal dividerat med ett negativt tal blir positivt.

$$2$$

Svar: 2

Exempel 7) Beräkna $\frac{12 - \frac{10}{5} \cdot (2-5) \cdot 2}{(5+(-2)) \cdot (3-1)}$

Lösning:

$$\frac{12 - \frac{10}{5} \cdot (2-5) \cdot 2}{(5+(-2)) \cdot (3-1)}$$

En bra strategi är att göra små beräkningar först. Exempelvis utföra divisionen i täljaren och eventuellt beräkna parenteserna.

$$\frac{12 - 2 \cdot (-3) \cdot 2}{(5-2) \cdot 2}$$

Beräkna produkten i täljaren och förenkla parentesen i nämnaren.

$$\frac{12+12}{3 \cdot 2}$$

Nu är uppgiften mer hanterbar. Resten av stegen görs utan kommentarer.

$$\frac{24}{6}$$

$$4$$

Svar: 4

Detta avsnitt avslutas med några begrepp som används inom matematiken. Begreppen är följande:

Term + Term = Summa
Term – Term = Differens

$\frac{\text{Täljare}}{\text{Nämnare}} = \text{Kvot}$

Faktor · Faktor = Produkt

Exempel 8) Termerna i en summa är 5 och 2. Denna summa divideras med differensen mellan 17 och 10. Vad blir kvoten?

Lösning:

Dela upp uppgiften, en för summan och en för differensen. "Termerna i en summa är 5 och 2" översätts till $5+2$. "... differensen mellan 17 och 10" översätts till $17-10$. Summan divideras med differensen.

$$\frac{5+2}{17-10}$$

Addera 5 med 2 och det blir 7. Subtrahera 17 med 10 och det blir 7.

$$\frac{7}{7}$$

Utför divisionen.

$$1$$

Svar: 1

Exempel 9) En summa på tre termer består av två kvoter och en produkt. I båda kvoterna är nämnaren 4 och täljarna är två större än summan av bådans nämnare. Produktens första faktor består av en differens mellan 5 och 7, och den andra faktorn är en summa mellan 1 och 2. Bestäm den totala summan.

Lösning:

Kvoterna har båda en nämnare som är 4. Täljaren är två större än summan av båda kvoternas nämnare vilket innebär att man ska beräkna $4+4+2=10$. Produkten har faktorerna $5-7$ och $1+2$. Sätt ihop allt nu.

$$\frac{10}{4} + \frac{10}{4} + (5-7)(1+2)$$

Nu är det bara att följa prioriteringsreglerna.

$$2,5+2,5+(-2) \cdot 3$$

$$5-6$$

$$-1$$

Svar: -1

Lektion 1: Uppgifter

Uppvärmning

U1 Beräkna följande uppgifter utan miniräknare:

- a) $-1+5\cdot 3$ b) $-3\cdot(-3)$
c) $2\cdot(-5)+2$ d) $9\cdot 2-9\cdot(-2)$
e) $2\cdot(13-11)-1$ f) $14-(12-16)+(-15)$
g) $\frac{3+3\cdot 5}{6-3}$ h) $(-2)\cdot 3-(-1)$
i) $5-\frac{18}{10-1}$ j) $\frac{1-2}{2-1}-1$
k) $\frac{12}{12}\cdot(5-4)$

Grundläggande

101 Beräkna följande uppgifter utan miniräknare:

- a) $-(-2)-11\cdot(-3)$ b) $6-\frac{4+5\cdot 7}{3}$
c) $15-\frac{18}{6}\cdot(13-25)$ d) $11-\frac{-48}{-12}\cdot(-13)$

102 Termerna i en differens är tre och nio. Differensen multipliceras med kvoten mellan femton och fem. Beräkna produkten.

103 Vilket tal ska adderas till -2 för att summan ska bli 13?

104 Placera talen 3, 7 och 18 i rutorna nedan så att uttrycket blir så stort som möjligt. Varje tal ska användas en gång.

$$\square - \square \cdot \square$$

Avancerat

105 Beräkna följande uppgifter utan miniräknare:

- a) $\frac{2(-3)+24}{\frac{25}{5}-2}(-7)$ b) $\frac{3-1\cdot(1-2)2}{7+\frac{1}{3-2}}$

106 Placera talen 2, 10 och 0,2 i rutorna nedan så att uttrycket blir så stort som möjligt. Varje tal ska användas en gång.

$$\frac{\square}{\square} - \square$$

107 Talen a och b är negativa tal. Bestäm a och b så att:

- a) $a+b=-12$ b) $a-b=5$

108 Förklara hur man direkt kan avgöra om en produkt med visst antal negativa tal är positivt eller negativt.

Fördjupning

109 Beräkna följande uppgifter utan miniräknare:

a)
$$\frac{1}{1-\frac{\frac{5}{6/2-\frac{5}{6+8/(1+1)}}{5}}{5}}$$

b)
$$\frac{2-\frac{(2-3)(3-2)}{\frac{3-1}{1-3}-2\cdot\frac{3\cdot 2-7}{7-3}}}{2-\frac{1}{3-2}}$$

110 Hitta på ett tal som är en produkt av ett positivt tal och ett negativt tal. Dividera detta tal med en summa av två negativa tal. Subtrahera sedan allt detta med en kvot där täljaren är två större än nämnaren. Bestäm avslutningsvis värdet på uttrycket.

111 Differensen mellan två kvoter divideras med summan av två produkter. Kvoternas täljare är 6 och 2 och deras nämnare är 4. Produkternas faktorer är 4, 4, 4 och 2. Svara exakt.

Lektion 2: Rationella tal och bråk

I detta avsnitt hanteras bråk i samband med multiplikation, division, addition och subtraktion. Vi börjar med hantering av addition och subtraktion.

Exempel 1) Beräkna $\frac{5}{3} + \frac{2}{7}$

Lösning:

$$\frac{7 \cdot 5}{7 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 2}{3 \cdot 7}$$

Förläng båda bråken så att de får gemensam nämnare.

$$\frac{35}{21} + \frac{6}{21}$$

Båda bråken har gemensam nämnare, då kan man addera täljarna med varandra.

$$\frac{41}{21}$$

Svar: $\frac{41}{21}$

Exempel 2) Beräkna $\frac{3}{5} - \frac{7}{2}$

Lösning:

$$\frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} - \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 2}$$

Förläng båda bråken så att de får gemensam nämnare.

$$\frac{6}{10} - \frac{35}{10}$$

Båda bråken har gemensam nämnare, då kan man subtrahera täljarna med varandra.

$$-\frac{29}{10}$$

Svar: $-\frac{29}{10}$

Som ni ser behöver man se till att båda bråken har gemensam nämnare vid addition och subtraktion. Nu går vi över till multiplikation och division.

Exempel 3) Beräkna $\frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}$

Lösning:

$$\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$$

Vid multiplikation behöver man inte ha gemensam nämnare. Vi multiplicerar täljarna med varandra och sedan nämnarna med varandra.

$$\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 4}$$

Utför multiplikationen i nämnaren och täljaren.

$$\frac{15}{8}$$

Svar: $\frac{15}{8}$

Exempel 4) Beräkna $\frac{3}{5} \cdot 6$

Lösning:

$$\frac{3}{5} \cdot 6$$

Ett enkelt sätt att hantera multiplikation med ett bråk och ett heltal är att lägga till en "hjälp-etta".

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{6}{1}$$

Nu kan vi behandla uppgiften som i det tidigare exemplet.

$$\frac{3 \cdot 6}{5 \cdot 1}$$

$$\frac{18}{5}$$

Svar: $\frac{18}{5}$

Exempel 5) Beräkna $\frac{5}{2} \div \frac{3}{7}$

Lösning:

$$\frac{5}{2} \div \frac{3}{7}$$

Vid division med bråk går det att byta ut divisionen mot multiplikation genom att vända upp och ner på bråket i nämnare, det vill säga att man vänder upp och ner på $\frac{3}{7}$ till $\frac{7}{3}$.

$$\frac{5}{2} \cdot \frac{7}{3}$$

Resten fungerar precis som tidigare med multiplikation.

$$\frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3}$$

$$\frac{35}{6}$$

Svar: $\frac{35}{6}$

Multiplikation och division fungerar likadant med ett extra steg vid division. Resterande exempel kommer att hantera bråk i olika situationer inklusive negativa tal och sedan några problemlösningssuppgifter.

Exempel 6) Beräkna $-1 + \frac{5}{2} \cdot 3$

Lösning:

$$-1 + \frac{5}{2} \cdot 3 \quad \text{Lägg till en "hjälp-etta" under 3:an.}$$

$$-1 + \frac{5 \cdot 3}{2 \cdot 1} \quad \text{Multipluera bråken med varandra.}$$

$$-1 + \frac{15}{2} \quad \text{Lägg till en "hjälp-etta" under 1:an.}$$

$$-\frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} + \frac{15}{2} \quad \text{Förläng första bråket.}$$

$$-\frac{2}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\frac{-2 + 15}{2}$$

$$\frac{13}{2}$$

Svar: $\frac{13}{2}$

Exempel 8) Avgör om $14/40$ är större än $0,4$.

Lösning:

$$0,4 = \frac{4 \cdot 4}{4 \cdot 10} = \frac{16}{40} \quad \text{Skriv om } 0,4 \text{ till ett bråk. Därefter förlänger vi nämnaren och täljaren med 4 för att se till att } 14/40 \text{ och } 0,4 \text{ har gemensam nämnare.}$$

Nu går det att jämföra båda uttrycken med varandra och då ser man enkelt att $16/40$ är större än $14/40$.

Svar: $0,4$ är större än $14/40$.

Exempel 10) Om $x = \frac{1}{3}$, bestäm $A/6$ så att $x \cdot A/2 = 1$.

Lösning:

Börja med att sätta in $x = \frac{1}{3}$ i $x \cdot A/2 = 1$ med. Vi får då:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{A}{2} = 1$$

Multipluera bråken med varandra.

$$\frac{A}{6} = 1$$

Nu kan man dra slutsatsen att $A/6 = 1$.

Svar: $A/6 = 1$

Exempel 7) Beräkna $-\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) / (-2)$

Lösning:

$$-\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) / (-2) \quad \text{Addera bråken i parentesen.}$$

$$-\left(\frac{2+1}{3}\right) / (-2) \quad \text{Addera 2 med 1.}$$

$$-\left(\frac{3}{3}\right) / (-2)$$

$$-1 / (-2) \quad \text{Skriv om detta till ett bråk.}$$

$$\frac{-1}{-2} \quad \text{Ett negativt tal dividerat med ett negativt tal blir positivt.}$$

$$\frac{1}{2}$$

Svar: $\frac{1}{2}$

Exempel 9) Om man vill att $\frac{x}{51}$ ska vara större än ett, vilket är det minsta heltalet på x som är tillåtet?

Lösning:

Vi ställer oss frågan, vad ska x vara för att bråket ska bli 1? Det måste vara 51. Men bråket ska vara större än 1 vilket innebär att x måste vara större än 51. Minsta heltalet blir då 52.

Svar: $x=52$

Lektion 2: Uppgifter

Uppvärmning

U2 Beräkna följande uttryck och förkorta så långt som möjligt utan miniräknare:

- a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ d) $\frac{2}{5} / \frac{3}{2}$
- e) $\frac{1}{6} + \frac{2}{6}$ f) $\frac{1}{6} - \frac{2}{6} + 1$
- g) $\frac{14}{28} - \frac{1}{2}$ h) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$
- i) $\frac{7}{12} - \frac{7}{6}$

Grundläggande

201 Beräkna följande uttryck och förkorta så långt som möjligt utan miniräknare:

- a) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{5}$ b) $\frac{3}{2} / \frac{5}{7} - \frac{2}{3}$
- c) $-2 + \frac{2}{3} \cdot 4$

202 Kvoten x/y är mindre än 1. Vad vet vi då om förhållandet mellan x och y ? Både x och y är positiva tal.

203 Talet $10/16$ består av summan av två bråk, vilket det ena är $3/8$. Vilket är det andra?

204 Mario gör följande uträkningar:

- a) $2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{6}{10}$
- b) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{1+1}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Vilka fel gör han i båda uträkningarna?

205 Skriv om kvoten $0,25/0,35$ som ett bråk på förkortad form (alltså som en kvot av två heltal som är så små som möjligt).

206 Sebastian har en födelsedag där han fått tre färdigskurna tårter. Den första är skuren i sjättedelar, den andra i femtedelar och den tredje är delad i hälften. Hur stor del av en hel tårta får Sebastian om han tar en bit av varje tårta?

207 Torbjörn har 5 chokladbollar och 9 bananer medan Charlotta har 11 chokladbollar och 17 bananer. Vem har störst andel chokladbollar?

Avancerat

208 Beräkna $2 - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)$ utan räknare.

209 Visa att bråktalet $3/7$ är mellan 0,4 och 0,6 utan miniräknare.

210 Ange det bråk som är två mindre än $2/5$.

211 Bestäm det tal som ligger mitt emellan $1/3$ och $2/5$ på tallinjen utan miniräknare. Svara i bråkform.

212 Anta att du har ett bråktalet, vad ska du multiplicera detta med för att få talet ett?

213 På en fotbollsmatch hejar en sjättedel av åskådarna på FK Kaathe och en femtedel FK Frampt. En femtedel av de som hejar på Kaathe och hälften av de som hejar på Frampt sjunger och resten är tysta. Hur stor andel är tysta?

Fördjupning

214 För talen $a \cdot b = c$ gäller att $a = \frac{x}{y}$ och $c = \frac{1}{y}$. Bestäm b .

215 Mirjana, Christelle, Hector och Marie delar på en smörgåstårta. Alla fyra tar olika stora andelar av tårten och summan av dessa andelar blir $7/8$. Ange en möjlig kombination av andelarna som de tog.

216 Bestäm $A / \frac{1}{5}$ om $A / \frac{2}{5} = \frac{6}{23}$.

217 Bestäm vilka värden på x som leder till att $x/21$ har ett värde som ligger mellan $1/7$ och $1/3$.

218 För $a \cdot b = c$ gäller att a är ett förkortat bråk. Om b och c ska vara heltal, vilka villkor gäller för a och b ?

Lektion 3: Algebraiska uttryck

I detta avsnitt hanteras algebraiska uttryck. Ett vanligt problem är att man förväxlar ekvationer med uttryck men det är inte samma sak. Ett uttryck skiljer sig från en ekvation genom att ett uttryck inte går att "lösa". Utan ett uttryck kan man göra två saker med: Man kan förenkla det, samt beräkna värdet hos det. I denna lektion kommer vi att fokusera på att förenkla uttryck.

Detta är ett exempel på en ekvation: $x+3=2$

Detta är ett exempel på ett uttryck: $x+3$

Likhetstecknet är det som avgör huruvida det är ett uttryck eller en ekvation. Låt oss nu gå till några exempel.

Exempel 1) Förenkla uttrycket $2(x+2)-(x-1)$

Lösning:

$$\begin{aligned} 2(x+2)-(x-1) & \text{ Multiplicera in 2:an i första } \\ & \text{ parentesen.} \\ 2x+4-(x-1) & \text{ Vi öppnar upp den andra } \\ & \text{ parentesen, då måste vi även byta } \\ & \text{ tecken på det som står inuti.} \\ 2x+4-x+1 & \text{ Nu kan vi subtrahera 2x med x och } \\ & \text{ addera 4 med 1.} \\ x+5 & \end{aligned}$$

Svar: $x+5$

Exempel 2) Förenkla uttrycket $-(x+2y)+2(y-x)$

Lösning:

$$\begin{aligned} -(x+2y)+2(y-x) & \text{ Öppna första parentesen och } \\ & \text{ multiplicera in 2:an i den andra.} \\ -x-2y+2y-2x & \text{ Sätt ihop x-termerna med varandra } \\ & \text{ och y-termerna med varandra.} \\ -3x & \end{aligned}$$

Svar: $-3x$

Exempel 3) Förenkla uttrycket $-2(y-x)+\frac{1}{3}(x+3y)$

Lösning:

$$\begin{aligned} -2(y-x)+\frac{1}{3}(x+3y) & \text{ Läggt dit "hjälp-ettor" i högra } \\ & \text{ parentesen.} \\ -2(y-x)+\frac{1}{3}\left(\frac{x}{1}+\frac{3y}{1}\right) & \text{ Multiplicera in negativt 2 i första } \\ & \text{ parentesen och multiplicera } \\ & \text{ in } 1/3 \text{ i den andra.} \\ -2y+2x+\frac{1}{3}\cdot\frac{x}{1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3y}{1} & \text{ Multiplicera bråken.} \\ -2y+2x+\frac{x}{3}+\frac{3y}{3} & \text{ Läggt dit en hjälp-etta under 2x.} \end{aligned}$$

$$-2y+\frac{2x}{1}+\frac{x}{3}+y \quad \text{Förläng bråken till gemensam nämnaren.}$$

$$\frac{6x}{3}+\frac{x}{3}-y$$

$$\frac{7x}{3}-y$$

Svar: $\frac{7x}{3}-y$

Exempel 4) Förenkla uttrycket $2x-\frac{x-1}{3}$

Lösning:

$$\begin{aligned} 2x-\frac{x-1}{3} & \text{ Läggt dit en "hjälp-etta".} \\ \frac{3\cdot 2x}{3\cdot 1}-\frac{x-1}{3} & \text{ Förläng vänstra bråket med 3.} \\ \frac{6x}{3}-\frac{x-1}{3} & \text{ Tänk på den osynliga parentesen.} \end{aligned}$$

$$\frac{6x-(x-1)}{3} \quad \text{Öppna parentesen.}$$

$$\frac{6x-x+1}{3}$$

$$\frac{5x+1}{3}$$

Svar: $\frac{5x+1}{3}$

Exempel 5) Förenkla uttrycket $-\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1 + x$

Lösning:

$$-\frac{x}{2} + \frac{x}{3} - 1 + x \quad \text{Lägg dit en "hjälp-etta" under x:et.}$$

$$-\frac{3 \cdot x}{3 \cdot 2} + \frac{2 \cdot x}{2 \cdot 3} - 1 + \frac{6 \cdot x}{6 \cdot 1} \quad \text{Förläng till gemensam nämnare.}$$

$$-\frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} - 1 + \frac{6x}{6} \quad \text{Sätt ihop bråken.}$$

$$\frac{-3x + 2x + 6x}{6} - 1$$

$$\frac{5x}{6} - 1$$

$$\text{Svar: } \frac{5x}{6} - 1$$

Exempel 7) Förenkla uttrycket $\frac{3+x}{3} - \frac{4+x}{2} - \frac{6+x}{2}$

Lösning:

$$\frac{2 \cdot (3+x)}{2 \cdot 3} - \frac{3 \cdot (4+x)}{3 \cdot 2} = \frac{6+2x}{6} - \frac{12+3x}{6} = \frac{6+2x-(12+3x)}{6} = \frac{6+2x-12-3x}{6} = \frac{-x-6}{6}$$

$$= \frac{-x-6}{6} = \frac{-x-6}{6} \cdot \left(-\frac{2}{6+x}\right) = \frac{(-x-6) \cdot (-2)}{6(6+x)} = \frac{(2x+12)/2}{(36+6x)/2} = \frac{x+6}{18+3x}$$

Kommentar: I sista steget förkortar vi nämnare och täljare med två. Detta är ett snyggare svar men kan vara svårt att se.

$$\text{Svar: } \frac{x+6}{18+3x}$$

Exempel 6) Förenkla uttrycket $\frac{x+2}{3} - \frac{2-3x}{3}$

Lösning:

$$\frac{x+2}{3} - \frac{2-3x}{3} \quad \text{Markera den osynliga parentesen.}$$

$$\frac{x+2}{3} - \frac{(2-3x)}{3} \quad \text{Addera bråken.}$$

$$\frac{x+2-(2-3x)}{3} \quad \text{Öppna parentesen och tänk på teckenbyte.}$$

$$\frac{x+2-2+3x}{3}$$

$$\frac{4x}{3}$$

$$\text{Svar: } \frac{4x}{3}$$

När man förenklar ett uttryck förändras inte värdet hos uttrycket. Man skriver bara om uttrycket på ett annat sätt. Detta kan visas exempelvis genom att man testavr sätta in ett värde istället för x innan och efter förenklingen. Man ska alltid få samma!

Exempel 8) Beräkna värdet på uttrycket $3(x+2) - 2(x-2)$ om $x=3$.

- a) Innan förenkling
- b) Efter förenkling

Lösning:

a) $3(x+2) - 2(x-2)$

$$3(3+2) - 2(3-2)$$

$$3 \cdot 5 - 2 \cdot 1$$

$$15 - 2$$

$$13$$

Svar: 13

b)

$$3(x+2) - 2(x-2)$$

$$3x+6-2x+4$$

$$x+10$$

Sätt in $x=3$ i uttrycket nu.

$$3+10=13$$

Svar: 13

Lektion 3: Uppgifter

Uppvärmning

U3 Förenkla följande uttryck:

- a) $2(x-1)$ b) $-2(2-x)$
c) $1-(x-1)$ d) $3(x-1)-2(x+2)$
e) $2(-x-1)$ f) $\frac{1}{2}(2x-4)$
g) $-(2-x)-1$

Grundläggande

301 Förenkla följande uttryck:

- a) $2(x-2y)-(x-3y)$
b) $2(a+b)-2(b+a)$
c) $-(2x-y)-\frac{1}{2}(y+4x)$
d) $\frac{1}{2}(6+2b)-0,5(3+7b)$
e) $-\frac{x+1}{2}+x$
f) $-\frac{2x}{7}+5-\frac{9x}{7}-6$

302 Beräkna värdet hos $5(2x+5)-10(3-x)$ om $x=6$

- a) Innan förenkling
b) Efter förenkling

303 Oskar ska förenkla uttrycket $\frac{x}{7}+2x$ och gör följande uträkning:

$$\frac{x}{7}+2x$$

$$\frac{x}{7}+\frac{14x}{7}$$

$$\frac{15x}{7}$$

$$15x$$

Förklara vad Oskar gör vid varje steg. Gör han något fel? I sådana fall förklara.

Avancerat

304 Förenkla uttrycken:

- a) $-3(2x-4y)-2(-x-2y)$
b) $\frac{1}{3}(x-2)-5(3-x)$
c) $\frac{x+4}{2}-\frac{2x-3}{2}$
d) $\frac{x}{4}+\frac{1}{5}+\frac{4x}{5}+\frac{3}{4}-x-1$

Fördjupning

305 Förenkla uttrycken:

- a) $\frac{x+1}{2}-\frac{x+2}{3}+\frac{x+3}{4}+1$
b) $(2+3)\left(\frac{x+2}{5}\right)\left(\frac{-2+3}{x+2}\right)$
c) $\frac{\frac{2}{3}(x+2)}{\frac{2}{3}(2+x)}$
d) $\frac{x+\frac{y}{2}-x-\frac{y}{3}}{2\left(\frac{1}{y}+\frac{2}{y}\right)}$

Lektion 4: Ekvationslösning del 1

Denna lektion handlar om att lösa ekvationer. Då man har ett uttryck lika med ett annat uttryck kallas det för en ekvation. När vi arbetar med ekvationslösningar är målet att lösa ut en bokstav, oftast x . Ekvationer har några regler:

Regel 1: Allt man gör på ena sidan, måste man också göra på andra sidan.

Regel 2: Man tar alltid motsats för att bli av med något

Regel 3: Vi arbetar med prioriteringsreglerna baklänges. Detta är mer en tumregel.

Exempel 1) Lös ekvationen $3x - 5 = 7$.

Lösning:

$3x - 5 + 5 = 7 + 5$ Vi adderar med 5 på båda sidorna för att "flytta" 5:an från vänster sida till höger sida. Lagg märke till att det står -5 , då är motsatsen $+5$. Lagg även märke till att vi hanterar subtraktionen före multiplikationen.

$$\frac{3x}{3} = \frac{12}{3}$$

Låt oss nu dividera båda sidorna med 3. Då det står 3 gånger x , måste man dividera med 3 för att få bort 3:an.

$$x = 4$$

Nu är x :et ensam och då är vi klara.

Svar: $x = 4$

Exempel 2) Lös ekvationen $\frac{x}{2} + 2 = 3$.

Lösning:

$\frac{x}{2} + 2 - 2 = 3 - 2$ Eftersom att vi utför prioriteringsreglerna baklänges börjar vi med additionen först genom att subtrahera med 2 på båda sidorna.

$$2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 1$$

Motsatsen till division är multiplikation, alltså behöver man multiplicera med 2 för att få bort 2:an från nämnaren. Observera att 2:orna på vänster sida "tar ut varandra".

$$x = 2$$

Nu är x :et ensam och då är vi klara.

Svar: $x = 2$

Vi tar upp reglerna en gång till. Som ni ser utför vi alltid motsats till vad som står (Regel 2). Det vi gör på ena sidan gör vi alltid på andra sidan också (Regel 1). Som ni ser har vi även arbetat med prioriteringsreglerna baklänges (Regel 3).

Nästa exempel kommer att lösas på två sätt. I detta exempel kommer vi även inte söka efter x utan vi kommer att söka t .

Exempel 3) Lös ekvationen $-3t + \frac{3}{4} = 2$. Detta är variant 1.

Lösning:

$$\frac{4 \cdot (-3t)}{4 \cdot 1} + \frac{3}{4} = \frac{2}{1}$$

Vi börjar med att lägga dit en hjälpetta under $-3t$ och sedan förlänga nämnare och täljare med 4.

$$\frac{-12t}{4} + \frac{3}{4} = 2$$

Addera bråken.

$$4 \cdot \frac{-12t + 3}{4} = 4 \cdot 2$$

Multiplisera båda sidorna med 4 för att få bort nämnaren.

$$-12t + 3 - 3 = 8 - 3$$

Subtrahera båda sidorna med 3.

$$\frac{-12t}{-12} = \frac{5}{-12}$$

Dela båda sidorna med -12 . Vi delar med negativt 12 för att få bort minustecknet från t .

$$t = \frac{5}{-12}$$

Då är vi klara här.

Svar: $t = -\frac{5}{12}$

Exempel 3) Lös ekvationen $-3t + \frac{3}{4} = 2$. Detta är variant 2.

Lösning:

$$\frac{4 \cdot (-3t)}{4 \cdot 1} + \frac{3}{4} = \frac{4 \cdot 2}{4 \cdot 1}$$

Vi börjar med att lägga dit en hjälpetta under $-3t$ och 2 för sedan förlänga nämnare och täljare med 4.

$$4 \cdot \frac{-12t}{4} + 4 \cdot \frac{3}{4} = 4 \cdot \frac{8}{4}$$

Samtliga termer har nu en fyra i nämnaren. Vi kan få bort nämnarna genom att multiplicera samtliga termer med 4.

$$-12t + 12t + 3 = 8 + 12t$$

Jämför nu med variant 1. Vi ska dock lösa uppgiften annorlunda. Vi adderar med $12t$ denna gång.

$$3 - 8 = 12t + 8 - 8$$

Subtrahera med 8.

$$\frac{-5}{12} = \frac{12t}{12}$$

Dividera med 12

$$t = -\frac{5}{12}$$

Svar: $t = -\frac{5}{12}$

Exempel 4) Lös ekvationen $3x - x + 2x = 20$

Lösning:

$$3x - x + 2x = 20 \quad \text{Börja med att förenkla vänsterled.}$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{20}{4}$$

Dividera med 4.

$$x = 5$$

Svar: $x = 5$

Exempel 5) Lös ekvationen $3 - \frac{3m}{2} = \frac{5}{3}$.

Lösning:

$$2 \cdot 3 - 2 \cdot \frac{3m}{2} = 2 \cdot \frac{5}{3}$$

Vi multiplicerar samtliga termer med 2.

$$3 \cdot 6 - 3 \cdot 3m = 3 \cdot \frac{10}{3}$$

Vi multiplicerar samtliga termer med 3 för att få bort 3:an från nämnaren.

$$18 - 9m - 18 = 10 - 18$$

Vi subtraherar båda sidorna med 18.
Missa inte att $-9m$ har ett minustecken framför.

$$\frac{-9m}{-9} = \frac{-8}{-9}$$

Dividera med negativt 9.

$$m = \frac{8}{9}$$

Svar: $m = \frac{8}{9}$

Exempel 6) Lös ekvationen $\frac{-3}{2}(x-3) - (x-2) + \frac{1}{3} = 1$.

Lösning:

$$\frac{-3}{2}(x-3) - (x-2) + \frac{1}{3} = 1 \quad \text{Börja med att multiplicera in bråket i första parentesen och öppna den andra.}$$

$$\frac{-3x}{2} + \frac{9}{2} - x + 2 + \frac{1}{3} = 1 \quad \text{Multiplicera samtliga termer med 2.}$$

$$-3x + 9 - 2x + 4 + \frac{2}{3} = 2 \quad \text{Multiplicera samtliga termer med 3.}$$

$$-9x + 27 - 6x + 12 + 2 = 6 \quad \text{Förenkla}$$

$$-15x + 41 - 41 = 6 - 41 \quad \text{Subtrahera med 41.}$$

$$\frac{-15x}{-15} = \frac{-35}{-15} \quad \text{Dividera med negativt 15.}$$

$$x = \frac{35/5}{15/5} \quad \text{Förkorta}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Svar: $x = \frac{7}{3}$

Vi avslutar med några uppgifter där vi undersöker värdet hos ett uttryck. Begreppet rot till en ekvation används på samma sätt när vi säger något är en lösning till en ekvation.

Exempel 7) Undersök om $x=-2$ är en rot till ekvationen $2x-5=-9$.

Lösning: Vi ska inte lösa ekvationen utan vi ska sätta in $x=-2$ och se utifall att vänsterled är lika med högerled.

$$\begin{aligned}2 \cdot (-2) - 5 &= -9 \\ -4 - 5 &= -9 \\ -9 &= -9\end{aligned}$$

Lägg märke till att jag färgmarkerat -2 där x stod och även satt dit en parentes efter som det är -2 .

Svar: Vi ser att vänsterled är lika med högerled alltså är detta en rot till ekvationen.

Exempel 8) Undersök om $x=5$ är en lösning till ekvationen $17-3x=3$.

Lösning:

$$\begin{aligned}17 - 3 \cdot 5 &= 3 \\ 17 - 15 &= 3 \\ 2 &\neq 3\end{aligned}$$

Här skriver jag inte ut en parentes för att det inte behövs.

Svar: Som ni ser är 2 inte lika med 3, alltså vänsterled är inte lika med högerled, där med ingen rot till ekvationen.

Exempel 9) Ange vilket uttryck som är störst om x är ett stort positivt tal: x^2 eller $2x$.

Lösning: Med "om x är ett stort positivt tal" innebär att vi ska tänka oss vad som händer ju större x blir. T.ex. om $x=5$ blir $5^2=25$ och $2 \cdot 5=10$. Om $x=10$ får vi $10^2=100$ och $2 \cdot 10=20$. Vi ser att x^2 kommer att bara bli större och större ju högre x -värde vi sätter in.

Svar: x^2 är störst för stora värden på x .

Lektion 4: Uppgifter

Uppvärmning

U4 Lös följande ekvationer och kontrollera dina svar:

- a) $3x=18$ b) $\frac{x}{4}=5$
- c) $\frac{x}{2}-1=1$ d) $5x+5=10$
- e) $-2x+2=6$ f) $\frac{x}{13}-1=0$
- g) $\frac{x}{2}-5=-1$ h) $2-x=3$

Grundläggande

401 Lös ekvationerna och kontrollera ditt svar:

- a) $\frac{4x}{9}=20$ b) $\frac{2x}{3}-6=14$
- c) $-4x-2=-2$ d) $-2x+6=1$

402 Undersök om $x=2$ är en lösning till:

- a) $2+3x=8$ b) $-2+\frac{x}{2}=-1$
- c) $3+2x=8$

403 Undersök om $x=-2$ är en lösning till:

- a) $2+3x=-4$ b) $3(2+2x)=-6$

404 Beräkna värdet på uttrycket $2a+3b-5$ om $a=-2$ och $b=3$.

Avancerat

405 Lös ekvationerna:

- a) $15-\frac{6x}{7}=3$ b) $\frac{z}{5}+\frac{2z}{3}=1$
- c) $y+2y+\frac{y}{3}=0$ d) $\frac{k}{3}-2k=2$

406 Beräkna värdet på uttrycket $\frac{c}{5}+\frac{c^2}{3}$ och $c=-3$.

407 Vad vet vi om $a-b$ då a är ett tal större än noll och b är ett tal mindre än 0?

Fördjupning

408 Lös ekvationerna:

- a) $\left(b+\frac{b}{3}\right)^2+1=3$ b) $\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=\frac{a}{5}$

409 Undersök och förklara mönstret du ser för olika värden på uttrycket $\frac{2}{x}$ om:

- a) x varierar mellan noll och ett.
- b) x är större än ett.
- c) x blir större och större (blir oändligt stort)

410 Ordna följande tal i storleksordning om n är ett stort negativt tal:

$$2n \qquad n-2n \qquad n^2$$

411 Undersök om $x=b+1$ är en lösning till ekvationen:

$$x+\frac{b}{2}=\frac{3b}{2}+1$$